Lie-Algebren in positiver Charakteristik am Beispiel von $\mathfrak{sl}_2(K)$

von

Lukas Buhr

Bachelorarbeit in Mathematik
vorgelegt dem Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik (FB 08)
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

am 16.12.2015

1. Gutachter: Prof. Dr. M. Blickle
2. Gutachter: Prof. Dr. D. van Straten

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Mainz, den

Lukas Buhr

Institut für Mathematik
Staudingerweg 9
Johannes Gutenberg-Universität D-55099 Mainz
`lbuhr@students.uni-mainz.de`

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Diese Arbeit steht in Verbindung zum Hauptseminar *Lie-Algebren*, welches unter Leitung von Herrn Prof. Dr. Blickle an der Universität Mainz im Sommersemester 2015 stattfand. Anhand von [1] wurde in die Theorie der Lie-Algebren eingeführt. Dabei wurde ein axiomatischer Zugang gewählt, d.h. der Zusammenhang mit Lie-Gruppen ausgespart und die Lie-Algebren ausgehend von ihrer abstrakten Definition untersucht.

Schon sehr früh wurde im Seminar eine Einschränkung an den Körper K vorgenommen. Er sollte Charakteristik 0 haben. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Fall $char(K) = p > 0$. Ziel ist es die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(K)$ zu klassifizieren.

Auf einem Körper mit positiver Charakteristik wird die Abbildung $x \mapsto x^p$ ein Homomorphismus - der Frobeniushomomorphismus. Wir werden in Analogie zum Frobeniushomomorphismus eine Abbildung $[p]$, genannt die p-Abbildung, auf einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K mit positiver Charakteristik p einführen. Dafür wird das Konzept der universellen einhüllenden Algebra gebraucht, welches wir im ersten Kapitel vorstellen.

Nun kann im zweiten Kapitel die p-Abbildung $[p]$ eingeführt werden. Mit ihrer Hilfe definieren wir die Begriffe halbeinfach und nilpotent für Elemente aus $\mathfrak{g}$ und beweisen, dass sich jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ als Summe zweier kommutierender Elemente x_s und x_n schreiben lässt, wobei x_s halbeinfach und x_n nilpotent ist. Dies ist für $char(K) = 0$ als Jordan-Zerlegung bekannt.

Im dritten Kapitel wird eine Einführung in die Darstellungstheorie von Lie-Algebren in positiver Charakteristik gegeben. Wir beweisen, dass jede irreduzible Darstellung einer endlichdimensionalen Lie-Algebra über einem Körper K mit positiver Charakteristik endlichdimensional ist und beginnen mit den Vorbereitung für die Bestimmung aller irreduziblen $\mathfrak{sl}_2(K)$-Moduln.

Diese werden im vierten Kapitel fortgesetzt. Es sei $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Wir werden zu bestimmten Typen von $\mathfrak{s}$-Moduln eine Einbettung in einen $\mathfrak{g}$-Modul konstruieren. Dies wird der induzierte Modul sein.

Die Beschreibung aller irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(K)$ findet im fünften Kapitel statt. Für sogenannte p-Darstellungen, das sind Darstellungen, die mit der p-Abbildung vertauschen, findet man ein ähnliches Ergebnis wie im Charakteristik-0-Fall. Für $char(K) = p > 0$ gibt es zu jedem $1 \leq n \leq p$ bis auf Isomorphie genau eine irreduzible p-Darstellung mit Dimension n. Dies sind alle irreduziblen p-Darstellungen.

Als Begründung für den größeren theoretischen Aufwand und ersten Hinweis, wie früh schon die Charakteristik des Grundkörpers eine Rolle spielt, möge folgendes Beispiel dienen:

Für eine komplexe endlichdimensionale Lie-Algebra gilt der Satz von Lie. Eine seiner Formulierungen ist, dass jede irreduzible endlichdimensionale Darstellung einer endlichdimensionalen komplexen auflösbaren Lie-Algebra eindimensional ist (siehe [1, S. 21]). Es sei nun K ein Körper mit Charakteristik $p > 0$. Wir definieren auf dem Vektorraum $V := Ke_1 \oplus \ldots \oplus Ke_p$ zwei Endomorphismen E und F durch

$$\begin{aligned} Ee_i &= \begin{cases} e_{i+1} & i \leq p-1 \\ e_1 & i = p \end{cases} \\ Fe_i &= (i-1)e_i. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(FE - EF)e_i = [F, E]e_i = \begin{cases} e_{i+1} & i \leq p-1 \\ e_1 & i = p \end{cases}.$$

Daher ist $\mathfrak{g} := KE + KF$ eine zweidimensionale Lie-Algebra mit $[F, E] = E$. Sie ist offensichtlich auflösbar. Wir folgen [2, S. 52 f.] und zeigen, dass V bereits eine irreduzible Darstellung ist. Es sei $0 \neq x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ ein Element eines Untermoduls $W \subseteq V$.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p \\ Fx &= 1\alpha_2 e_2 + \ldots + (p-1)\alpha_p e_p \\ &\vdots \\ F^{p-1}x &= 1^{p-1}\alpha_2 e_2 + \ldots + (p-1)^{p-1}\alpha_p e_p \\ &. \end{aligned}$$

Das schreiben wir so:

$$\begin{pmatrix} x \\ Fx \\ \vdots \\ F^{p-1}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & (p-1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & (p-1)^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 e_1 \\ \alpha_2 e_2 \\ \vdots \\ \alpha_p e_p \end{pmatrix}$$

Die $p \times p$-Matrix auf der rechten Seite sei A. Es sei A^* die adjunkte Matrix zu A. Dann gilt

$$A^* \begin{pmatrix} x \\ Fx \\ \vdots \\ F^{p-1}x \end{pmatrix} = det(A) \begin{pmatrix} \alpha_1 e_1 \\ \alpha_2 e_2 \\ \vdots \\ \alpha_p e_p \end{pmatrix}$$

Die Determinante von A ist gerade die Vandermonde-Determinante und man sieht, dass $det(A) \neq 0$ ist. Daher gibt es ein i_0 so, dass $det(A)\alpha_{i_0} e_{i_0} \neq 0$ ist. Da A^* Koeffizienten in K hat, ist dann $det(A)\alpha_{i_0} e_{i_0} \in W$. Dann erhält man aber durch die Anwendung von E den ganzen Modul V.
Als bekannt vorausgesetzt werden alle grundlegenden Definitionen wie auflösbare, nilpotente, halbeinfache oder vollständig reduzible Lie-Algebra, Darstellung einer Lie-Algebra und zugehöriger Modul. Es bezeichnet in der ganzen Arbeit $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über dem Körper K. Im Zweifel ist K immer algebraisch abgeschlossen. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthalten nicht die Null. Alle Ideale seien beidseitig.

1 Die universelle einhüllende Algebra

Es wird die universelle einhüllende Algebra $U(\mathfrak{g})$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ definiert. Sie ist eine assoziative Algebra, in welche sich $\mathfrak{g}$ einbetten lässt. Die universelle einhüllende Algebra ist ein wichtiges Werkzeug bei der Untersuchung der $\mathfrak{g}$-Moduln. Denn eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur auf einem Vektorraum V lässt sich eindeutig zu einer $U(\mathfrak{g})$-Modulstruktur fortsetzen.

In diesem Abschnitt bezeichne $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra beliebiger Dimension über einem Körper K mit beliebiger Charakteristik. Unter einer Algebra verstehen wir im Folgenden eine assoziative Algebra mit Eins. Assoziative Homomorphismen sollen die Eins erhalten. Eine Darstellung einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Vektorraum V zusammen mit einem assoziativen Homomorphismus ρ in die assoziative Algebra der Endomorphismen auf V. Alle Ideale seien beidseitige Ideale. Auf einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ wird durch den Kommutator eine Lie-Klammer definiert. Die dadurch definierte Lie-Algebra sei $\mathcal{A}^-$. Wir folgen hier [2, S. 151-156] und [8, S. 44-51].

Definition 1.1. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über einem Körper K, $\mathcal{U}$ eine Algebra und $i : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}^-$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Dann heißt das Tupel $(\mathcal{U}, i)$* universelle einhüllende Algebra *von $\mathfrak{g}$, falls für jeden Homomorphismus $f : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}^-$ genau ein assoziativer Homomorphismus $h : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ existiert mit $h \circ i = f$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[dr, dotted, "\exists!\, h"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Bemerkung und Notation 1.2. Wie üblich ist die universelle einhüllende Algebra durch ihre universelle Eigenschaft eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt. Wir schreiben $U(\mathfrak{g})$ für die universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}$ und $Z(\mathfrak{g})$ für ihr Zentrum.

Wir stellen die Existenz hinten an und zeigen zunächst einige Aussagen über $U(\mathfrak{g})$.

Satz 1.3. *i. $U(\mathfrak{g})$ ist als Algebra von $i(\mathfrak{g})$ erzeugt.*

ii. $(U(\mathfrak{g}_1), i_1)$ und $(U(\mathfrak{g}_2), i_2)$ seien jeweils universelle einhüllende Algebren von L_1 bzw. L_2. Dann existiert zu jedem Lie-Algebren-Homomorphismus $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein assoziativer Homomorphismus $\tilde{f} : U(\mathfrak{g}_1) \to U(\mathfrak{g}_2)$ mit $\tilde{f} \circ i_1 = i_2 \circ f$.

iii. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b}$ das von $i(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal in $U(\mathfrak{g})$. Dann ist:

$$j : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to (U(\mathfrak{g})/\mathfrak{b})^-, \ x + \mathfrak{a} \mapsto i(x) + \mathfrak{b}$$

ein Lie-Algebren-Homomorphismus und $(U(\mathfrak{g})/\mathfrak{b}, j)$ die universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

Beweis. i. Es sei $\mathcal{A}$ die von $i(\mathfrak{g})$ erzeugte Unteralgebra von $U(\mathfrak{g})$. Dann existiert nach der universellen Eigenschaft genau ein Homomorphismus $h : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ mit $h \circ i = i$. Ist $j : \mathcal{A} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$ die Inklusion, so ergibt sich insgesamt:

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g}) \arrow[dr, dotted, "\exists!\, h"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"'] \arrow[dr, "i"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "j"] \\
& U(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

Es gilt also $i = j \circ i = (j \circ h) \circ i$. Daher ist, wegen der geforderten Eindeutigkeit in der definierenden universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$, $j \circ h$ gleich der Identität auf $U(\mathfrak{g})$. Damit ergibt sich

$$U(\mathfrak{g}) = Id_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g})) = (j \circ h)(U(\mathfrak{g})) \subseteq \mathcal{A}.$$

ii. Die Behauptung folgt aus der universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g}_1)$, da durch $i_2 \circ f$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus von $\mathfrak{g}_1$ nach $U(\mathfrak{g}_2)^-$ gegeben ist.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, "i_2 \circ f"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "i_2"] \\
U(\mathfrak{g}_1) \arrow[r, dotted, "\exists! \tilde{f}"'] & U(\mathfrak{g}_2)
\end{tikzcd}$$

iii. Wegen $j(\mathfrak{a}) = \{0\}$, ist j nach dem Homomorphiesatz für Lie-Algebren ein wohldefinierter Lie-Algebren-Homomorphismus. Es sei nun $\mathcal{A}$ eine Algebra, $f : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to \mathcal{A}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus, $\pi' : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})/\mathfrak{b}$ und $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ bezeichnen die natürlichen Projektionen. Aus der universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$

erhält man einen Homomorphismus $\overline{f \circ \pi} : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \\
U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\pi'"] \arrow[urr, dotted, "\exists!\ \overline{f\circ\pi}"] & U(\mathfrak{g})/\mathfrak{b} & \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\pi"'] \arrow[u, "i"] & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \arrow[u, "j"'] \arrow[uur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Wegen $f(\mathfrak{a}) = \{0\}$, muss $i(\mathfrak{a})$ im Kern von $\overline{f \circ \pi}$ enthalten sein. Da Kerne Ideale sind, folgt $\mathfrak{b} \subseteq ker(\overline{f \circ \pi})$. Nach dem Homomorphiesatz existiert ein assoziativer Homomorphismus $\tilde{f} : U(\mathfrak{g})/\mathfrak{b} \to \mathcal{A}$ so, dass $\tilde{f}(x + \mathfrak{b}) = \overline{f \circ \pi}(x)$ ist. Für $x \in \mathfrak{g}$ erhält man:

$$f(x + \mathfrak{a}) = \overline{f \circ \pi}(i(x)) = \tilde{f}(\pi'(i(x))) = \tilde{f}(j(x + \mathfrak{a})) = (\tilde{f} \circ j)(x + \mathfrak{a}).$$

Damit ist $\tilde{f}$ der gesuchte Homomorphismus. Nach i. ist $U(\mathfrak{g})$ von $i(\mathfrak{g})$ erzeugt. Also ist $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{b}$ von $i(\mathfrak{g}) + \mathfrak{b} = j(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ erzeugt. Daher ist $\tilde{f}$ eindeutig durch f bestimmt.

□

Korollar 1.4. *Ist $(U(\mathfrak{g}), i)$ eine universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}$ und V ein $\mathfrak{g}$-Modul, dann existiert genau eine $U(\mathfrak{g})$-Modulstruktur $\bullet$ auf V mit $av = i(a) \bullet v$ für alle $a \in \mathfrak{g}$. Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ ist genau dann ein $\mathfrak{g}$-Untermodul, wenn W ein $U(\mathfrak{g})$-Untermodul ist.*

Beweis. Es sei $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ die zur $\mathfrak{g}$-Modulstruktur von V gehörende Darstellung. Dann existiert genau ein Homomorphismus $\overline{\rho} : U(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$ und es gilt für die zugehörige $U(\mathfrak{g})$-Modulstruktur $\bullet$

$$i(a) \bullet v = \overline{\rho}(i(a))(v) = \rho(a)(v) = av, \text{ für alle } a \in \mathfrak{g}, \text{ für alle } v \in V$$

Ist $W \subseteq V$ ein $U(\mathfrak{g})$-Untermodul, so ist er auch ein $\mathfrak{g}$-Modul. Es sei $W \subseteq V$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul. Dann ist

$$\mathcal{A} = \{x \in U(\mathfrak{g}) \mid x \bullet w \in W \text{ für alle } w \in W\}$$

eine Unteralgebra von $U(\mathfrak{g})$, die $i(\mathfrak{g})$ enthält. Wegen Satz 1.3 ist dann $\mathcal{A} = i(\mathfrak{g})$. □

Bemerkung 1.5. Von nun an wird nicht mehr zwischen $\mathfrak{g}$-Moduln und $U(\mathfrak{g})$-Moduln unterschieden.

Für die Existenz der universellen einhüllenden Algebra von $\mathfrak{g}$ verwenden wir die Tensoralgebra $\mathcal{T}$ über dem K-Vektorraum $\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{T} := K1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \ldots, \quad \mathfrak{g}_i = \otimes_{j=1}^{i} \mathfrak{g}.$$

Die Multiplikation ist durch $\otimes$ gegeben:

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_j) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \ldots \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_j \ \in \mathfrak{g}_{i+j}$$

Ist $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung in eine Algebra $\mathcal{A}$, so rechnet man nach, dass durch

$$\overline{\alpha} : \mathcal{T} \to \mathcal{A},\ x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_n),\ 1 \mapsto 1$$

ein Homomorphismus gegeben ist, der, wenn man $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g}_1$ identifiziert, α auf ganz $\mathcal{T}$ fortsetzt.

Es sei nun $\mathfrak{a}$ das von den Elementen $[a, b] - a \otimes b + b \otimes a$ mit $a, b \in \mathfrak{g}$ erzeugte Ideal in $\mathcal{T}$ und $i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Einschränkung der natürlichen Projektion $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{g}_1$. Dann ist wegen

$$\begin{aligned} i([a, b]) &= [a, b] + \mathfrak{a} \\ &= [a, b] + (a \otimes b - b \otimes a - [a, b]) + \mathfrak{a} \\ &= a \otimes b - b \otimes a + \mathfrak{a} \quad \text{für alle } a, b \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

i ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

Satz 1.6. *Das eben konstruierte Paar $(\mathcal{T}/\mathfrak{a}, i)$ ist eine universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Es sei eine Algebra $\mathcal{A}$ und ein Lie-Algebren-Homomorphismus $f : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}^-$ gegeben. Dann existiert ein Homomorphismus $f' : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$. Sind $a, b \in \mathfrak{g}$, so folgt:

$$\begin{aligned} f'([a, b] - a \otimes b + b \otimes a) &= f([a, b]) - f(a)f(b) + f(b)f(a) \\ &= [f(a), f(b)] - f(a)f(b) + f(b)f(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist $\mathfrak{a}$ im Kern von f' enthalten und der Homomorphiesatz liefert eine Abbildung

$f'' : \mathcal{T}/\mathfrak{a} \to \mathcal{A}$ mit

$$f(x) = f''(x) = (f' \circ i)(x) \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{g}.$$

Da $\mathcal{T}$ von $\mathfrak{g}$ erzeugt ist, ist $\mathcal{T}/\mathfrak{a}$ von $i(\mathfrak{g})$ erzeugt. Das liefert die Eindeutigkeit von f''. □

Unsere Konstruktion von $U(\mathfrak{g})$ zeigt, falls $\{e_i\}_{j\in J}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ ist, dass dann die Monome $e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}$ zusammen mit der 1, ganz $U(\mathfrak{g})$ erzeugen. Tatsächlich gilt folgender bekannter Satz.

Satz 1.7. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über einem Körper K mit geordneter Basis $\{e_j\}_{j\in J}$ und $(U(\mathfrak{g}), i)$ eine universelle einhüllende Algebra. Dann ist*

$$\left\{ i(x_{j_1}^{k_1}) \cdot \ldots \cdot i(x_{j_n}^{k_n}) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0,\ k_j \geq 0 \text{ für alle } j \in J,\ j_1 < j_2 < \ldots < j_n \in J \right\}$$

eine Basis von $U(\mathfrak{g})$.

Beweis. Siehe [2, S. 156-160]. □

Bemerkung 1.8. Damit ist nun auch die Injektivität von $i : \mathfrak{g} :\to U(\mathfrak{g})^-$ gezeigt und wir fassen L als Unteralgebra von $U(\mathfrak{g})^-$ auf.

Es sei $\{e_i\}_{i\in I}$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$.

Notation 1.9. Für $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{(I)}$ definieren wir $\mathbf{e}^{\mathbf{n}}$ durch $\prod_{i\in I} e_i^{n_i}$. Dabei soll I aufsteigend durchlaufen werden, d.h. es ist

$$\mathbf{e}^{\mathbf{n}} = e_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot \ldots \cdot e_{i_j}^{n_{i_j}} \text{ mit } i_1 < \ldots < i_j \text{ geeignet.}$$

Weiterhin sei

$$|\mathbf{n}| \coloneqq \sum_{i\in I} n_i \quad \text{und} \quad \epsilon_j(i) \coloneqq \delta_{ij}.$$

Als letztes setzten wir noch $U_{(k)} \coloneqq K1 + \mathfrak{g}^1 + \ldots + \mathfrak{g}^k$, wobei die Exponenten in $U(\mathfrak{g})$ zu verstehen sind. Dann ist

$$U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} U_{(k)} \quad \text{und} \quad U_{(k)}U_{(l)} \subseteq U_{(k+l)}.$$

Bemerkung 1.10. Die Familie $\{U_{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt die *kanonische Filtrierung* von $U(\mathfrak{g})$.

Das folgende Lemma ist eine Vereinfachung von [8, Prop. 9.1].

Lemma 1.11. *Mit den Bezeichnungen aus* 1.9 *gilt:*

i. $U_{(k)} = \langle \left\{ \mathbf{e}^{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{(I)} \textit{ und } \middle| \mathbf{n}| \leq k \right\} \rangle$

ii. Die Menge $\left\{ \mathbf{e}^{\mathbf{n}} + U_{(k-1)} \,\middle|\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{(I)} \textit{ und } |\mathbf{n}| = k \right\}$ *ist eine Basis von* $U_{(k)}/U_{(k-1)}$.

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus 1.7 und der ersten Behauptung. Es genügt daher zu zeigen, dass $U_{(k)}$ in der linearen Hülle von $\left\{ \mathbf{e}^{\mathbf{n}} \,\middle|\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{(I)} \text{ und } |\mathbf{n}| \leq k \right\}$ enthalten ist. Das geschieht mit vollständiger Induktion nach k. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Angenommen die Behauptung ist wahr für alle $l < k$. Es sei $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$ aus $U_{(l)}$. Dann liegt nach Induktionsannahme $x_1 \cdot \ldots x_{k-1}$ in der linearen Hülle von $\left\{ \mathbf{e}^{\mathbf{n}} \,\middle|\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^{(I)} \text{ und } |\mathbf{n}| \leq k-1 \right\}$. Es ist daher für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{(I)}$ mit $|\mathbf{n}| \leq k-1$ zu zeigen:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{n}} e_j \in \langle \{ \mathbf{e}^{\mathbf{m}} \mid \ |\mathbf{m}| \leq k \} \rangle. \tag{1.1}$$

Dazu sei

$$G := \left\{ \sigma \in S_k \,\middle|\, e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} - e_{i_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot e_{i_{\sigma(k)}} \in U_{(k-1)} \ \text{ für alle } i_1, \ldots, i_k \in I \right\}$$

Es sei $\tau = (j\ j{+}1) \in S_k$.

$$\begin{aligned} e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} - e_{i_{\tau(1)}} \cdot \ldots \cdot e_{i_{\tau(k)}} &= e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} - e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{j+1}} e_{i_j} e_{i_{j+2}} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \\ &= e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{j-1}} [e_{i_j}, e_{i_{j+1}}] e_{i_{j+2}} \cdot \ldots \cdot e_{i_l} \in U_{(k-1)} \end{aligned}$$

Also liegt τ in G. Es ist für ρ, $\sigma \in G$

$$\begin{aligned} e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} - e_{i_{\rho\circ\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot e_{i_{\rho\circ\sigma(k)}} &= e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} - e_{i_{\tau(1)}} \cdot \ldots \cdot e_{i_{\tau(k)}} \\ &\quad + e_{i_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot e_{i_{\sigma(k)}} - e_{i_{\rho\circ\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot e_{i_{\rho\circ\sigma(k)}}. \end{aligned}$$

Damit liegt auch $\rho \circ \sigma$ wieder in G. Da die Transpositionen $(1\ 2), \ldots, (k{-}1\ k)$ ganz S_k erzeugen, ist $G = S_k$. Insbesondere ist $\mathbf{e}^{\mathbf{n}} e_j - e^{\mathbf{n}+\epsilon_j} \in U_{k-1}$, was (1.1) zeigt. □

Zur späteren Verwendung zeigen wir noch ein Lemma. Es wird im dritten Kapitel sehr oft angewandt werden. Der Beweis folgt [8, S. 58 f.].

Lemma 1.12. *Es gebe zu jedem Basiselement* e_i *eine positive ganze Zahl* k_i *und ein Element* z_i *aus dem Zentrum von* $U(\mathfrak{g})$ *so, dass* $e_i^{n_i} - z_i$ *in* $U_{(k_i-1)}$ *enthalten ist. Dann* *bilden die Elemente der Form*

$$\mathbf{z}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}^{\mathbf{s}} \quad \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^{(I)} \textit{ mit } s_i < k_i \quad \textit{für alle } i \in I$$

eine Basis von $U(\mathfrak{g})$.

Beweis. Es sei

$$B_t := \left\{ \mathbf{z}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}^{\mathbf{s}} \;\middle|\; \sum_{i \in I} r_i s_i + |s| \leq t, s_i < k_i \right\}$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass B_t eine Basis von $U_{(t)}$ ist. Für $t = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $t > 0$ und die Behauptung schon für alle $\tilde{t} < t$ gezeigt. Nach Voraussetzung ist $z_i \equiv e_i^{k_i}$ *mod* $U_{(k_i - 1)}$. Es folgt

$$z_i^{r_i} \equiv e_i^{k_i r_i} \; mod \; U_{(r_i k_i - 1)}.$$

Ist nun $\mathbf{z}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}^{\mathbf{s}} \in B_t$, so folgt, da z_i für alle i im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$ liegt,

$$\mathbf{z}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}^{\mathbf{s}} = \prod_{i \in I} z_i^{r_i} e_i^{s_i} \equiv \prod_{i \in I} e_i^{r_i k_i + s_i} \; mod \; U_{(t-1)}.$$

Es gelte nun für $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(m)} \in K$ und $\mathbf{z}^{\mathbf{r}^{(1)}}\mathbf{e}^{\mathbf{s}^{(1)}}, \ldots, \mathbf{z}^{\mathbf{r}^{(m)}}\mathbf{e}^{\mathbf{s}^{(m)}} \in B_t$

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha^{(j)} \mathbf{z}^{\mathbf{r}^{(j)}}\mathbf{e}^{\mathbf{s}^{(j)}}.$$

Daraus folgt

$$0 \equiv \sum_{j \text{ mit } \sum_{i \in I} r_i^{(j)} k_i + |\mathbf{s}^{(j)}| = t} \alpha^{(j)} \prod_{i \in I} e_i^{r_i^{(j)} k_i + s_i^{(j)}} \quad mod \; U_{(t-1)} \tag{1.2}$$

Man beachte: Sind $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ und $(\mathbf{r}', \mathbf{s}')$ mit

$$r_i k_i + s_i = r_i' k_i + s_i' \quad \text{für alle } i \in I \quad \text{und} \quad 0 \leq s_i, s_i' < k_i,$$

gegeben, so folgt $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = (\mathbf{r}', \mathbf{s}')$. Wegen Lemma 1.11 und Gleichung (1.2) muss dann für ein $j \in J$, welches $\sum_{i \in I} r_i^{(j)} k_i + |\mathbf{s}^{(j)}| = t$ erfüllt, $\alpha^{(j)} = 0$ sein. Aus der Induktionsannahme folgt die lineare Unabhängigkeit. B_t ist aber auch ein Erzeugendensystem für $U_{(t)}$, da es zu jedem n aus $\mathbb{N}^{(I)}$ ein Tupel $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ aus $\mathbb{N}^{(I)} \times \mathbb{N}^{(I)}$ gibt mit

$$n_i = r_i k_i + s_i \quad \text{und} \quad 0 \leq s_i < k_i \quad \text{für alle } i \in I.$$

$\square$

2 Lie-p-Algebren

In diesem Kapitel sollen sogenannte Lie-p-Algebren definiert werden. Sie sind Lie-Algebren zusammen mit einer Abbildung $[p] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Diese wird im Folgenden motiviert.

Es sei $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra über einem Körper K mit $char(K) = p > 0$ und $\mathfrak{g} := \mathcal{A}^-$. Wir betrachten die Abbildung

$$[p] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ x \mapsto x^{[p]} := x^p$$

Offensichtlich ist

$$(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]} \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{g}. \tag{2.1}$$

Analog wie in [2, S. 185 ff.] untersuchen wir die Abbildung $[p]$. Im Polynomring $K[X,Y]$ gelten die Formeln:

$$(X - Y)^p = X^p - Y^p = (X - Y) \sum_{i=0}^{p-1} X^i Y^{p-1-i} \tag{2.2}$$

$$(X - Y)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} X^i Y^{p-1-i}. \tag{2.3}$$

Es sei nun $x \in \mathfrak{g}$ und x_R bezeichne die Rechtsmultiplikation mit x und x_L die Linksmultiplikation. Dann kommutieren die Endomorphismen x_R und x_L. Aus (2.2) und (2.3) folgt

$$ad(x)^p = (x_R - x_L)^p = (x_R)^p - (x_L)^p = x_R^{[p]} - x_L^{[p]} = ad(x^{[p]}). \tag{2.4}$$

Gleichung (2.3) liefert für $y \in \mathfrak{g}$:

$$ad(x)^{p-1}(y) = \sum_{i=0}^{p-1} x^{p-1-i} y x^i \quad \text{für alle } y \in \mathfrak{g}. \tag{2.5}$$

Dies benutzen wir um eine Formel für $(a + b)^p$, $a, b \in \mathfrak{g}$, zu finden. Dazu machen wir im Polynomring $\mathfrak{g}[X]$ den Ansatz

$$(aX + b)^p = a^p X^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b) X^i,$$

wobei $s_i(a,b)$ ein noch zu bestimmender polynomialer Ausdruck in a und b sei. Differenzieren nach X ergibt:

$$\sum_{i=0}^{p-1}(aX+b)^i a(aX+b)^{p-1-i} = \sum_{i=1}^{p-1} is_i(a,b)X^{i-1}.$$

Aus (2.5) folgt

$$\sum_{i=1}^{p-1} is_i(a,b)X^{i-1} = ad(aX+b)^{p-1}(a). \tag{2.6}$$

Dadurch ist $s_i(a,b)$ eindeutig bestimmt und für $X=1$ erhalten wir die Formel

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b). \tag{2.7}$$

Man beachte, dass man $is_i(a,b)$ durch Addition und Kommutatorbildung aus a und b erhält. Wir betten $\mathfrak{g}$ in $U(\mathfrak{g})$ ein. Neben der Abbildung $[p]$ gibt es jetzt noch die p-te Potenz in $U(\mathfrak{g})$. Dafür schreiben wir x^p. Da $U(\mathfrak{g})$ assoziativ ist, erhält man dieselben Formeln. Man ersetze nur überall $x^{[p]}$ durch x^p. Die $s_i(a,b)$ bleiben aber gleich. Wir erhalten:

$$(x+y)^p - x^p - y^p = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y) = (x+y)^{[p]} - x^{[p]} - y^{[p]} \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{g}.$$

Das zeigt zusammen mit (2.1) die p-Semilinearität der Abbildung

$$\xi : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}),\ x \mapsto x^p - x^{[p]}.$$

Um das Bild von ξ näher zu untersuchen, betrachten wir für $x \in \mathfrak{g}$ den Endomorphismus $ad(x)$ von $U(\mathfrak{g})$. Für $y \in \mathfrak{g}$ hatten wir schon bemerkt, dass

$$ad(x^p)(y) = ad(x)^p(y) = ad(x^{[p]})(y).$$

gilt. Aus dem Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem 1.7 folgt daher, dass ξ ins Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ abbildet oder in Formeln:

$$ad(x)^p = ad(x^{[p]}) \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{g}. \tag{2.8}$$

Unsere Überlegungen münden in folgender Definition, die [3, S. 4] entnommen ist.

Definition 2.1. *(Lie-p-Algebra) Eine Lie-p-Algebra über einem Körper K mit positiver*

Charakteristik, ist eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer Abbildung, genannt die p-Abbildung

$$[p] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ x \mapsto x^{[p]},$$

derart, dass die Abbildung

$$\xi : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}),\ x \mapsto x^p - x^{[p]}$$

p-semilinear ist und $\xi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ im Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ liegt.

Bemerkung 2.2. i. Zur Definition der p-Abbildung ist es äquivalent (2.1), (2.7) und (2.8) zu fordern, wobei dann die $s_i(a, b)$ durch (2.6) bestimmt sein sollen.

ii. Aus der Definition der p-Abbildung folgt, dass die Differenz zweier p-Abbildungen eine p-semilineare Abbildung nach $Z(\mathfrak{g})$ ist und man umgekehrt bei Addition einer semilinearen Abbildung $f : \mathfrak{g} \to Z(\mathfrak{g})$ zu einer gegebenen p-Abbildung wieder eine p-Abbildung erhält. Ist also das Zentrum von $U(\mathfrak{g})$ trivial, so kann es höchstens eine p-Abbildung geben.

i. Eine p-Abbildung ist vollständig durch ihre Werte auf einer Basis von $\mathfrak{g}$ festgelegt. Denn wenn zwei p-Abbildungen auf einer Basis übereinstimmen, so ist die Differenz eine p-semilineare Abbildung, in deren Kern ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{g}$ liegt.

Beispiel 2.3. i. Die Lie-Algebra der Derivationen $Der_K(\mathcal{A})$ auf einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper mit $char(K) = p > 0$ ist eine Lie-p-Algebra. Denn die Leibnizformel für eine Derivation $D \in Der_K(\mathcal{A})$

$$D^k(ab) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i(a) D^{k-i}(b), \quad a, b \in \mathcal{A}$$

wird zu $D^p(ab) = D^p(a)b + aD^p(b)$, d.h. $Der_K(\mathcal{A})$ ist eine unter der p-fachen Hintereinanderausführung von $D \in Der_K(V)$ abgeschlossene Unteralgebra der assoziativen Algebra der Endomorphismen auf $\mathcal{A}$.

ii. Es sei K ein Körper mit $char(K) = p > 0$. Dann ist $\mathfrak{gl}_n(K)$ abgeschlossen unter der p-ten Potenz bezüglich der Matrixmultiplikation. Diese Lie-p-Algebra bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathfrak{gl}_n(K)$.

Wir definieren nun die Unteralgebren in der Kategorie der Lie-p-Algebren. Die folgenden Definitionen und Lemmata sind [8, S. 65 ff.] entnommen.

Definition 2.4. *Es sei* $(\mathfrak{g}, [p])$ *eine Lie-p-Algebra.*

i. *Eine p-Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$ *ist eine bezüglich der p-Abbildung* $[p]$ *abgeschlossene Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$. *Analog definieren wir p-Ideale.*

ii. *Es sei* $S \subseteq \mathfrak{g}$ *eine Teilmenge. Der Schnitt aller p-Unteralgebren von* $\mathfrak{g}$, *die* S *enthalten, ist eine p-Algebra. Sie heißt die von* S *erzeugte p-Unteralgebra. Wir schreiben dafür* S_p.

Notation 2.5. Die i-fache Anwendung von $[p]$ auf ein $x \in \mathfrak{g}$ notieren wir mit $x^{[p^i]}$.

Lemma 2.6. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-p-Algebra über einem Körper* K *und* $H \subseteq \mathfrak{g}$ *eine Unteralgebra mit Basis* $\{e_i\}_{i\in I}$. *Dann gilt:*

i.
$$H_p = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \langle H^{[p^i]}\rangle = \sum_{j\in J,\, i\in\mathbb{N}_0} K e_j^{[p^i]}$$

ii. $LH_p = LH$, *d.h. ist* I *ein Ideal, so ist* I_p *ein p-Ideal.*

Beweis. i. Es sei $G := \sum_{j\in J,\, i\in\mathbb{N}_0} K e_j^{[p^i]}$. Dann ist $G \subseteq \sum_{i\in\mathbb{N}_0}\langle H^{[p^i]}\rangle \subseteq H_p$ und es genügt $H_P \subseteq G$ zu zeigen. Es gilt wegen (2.8)

$$ad(e_k^{[p^i]})(e_l^{[p^j]}) = ad(e_k)^{p^i-1}(-ad(e_l)^{p^j}(e_k)) \in H^2 \subseteq H \subseteq G \tag{2.9}$$

Also ist G eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Es sei $V := \left\{ x \in G \;\middle|\; x^{[p]} \in G \right\}$. Dann ist V wegen (2.1) und (2.7) ein Untervektorraum. Da jedoch die Menge

$$\left\{ e_j^{[p^i]} \;\middle|\; j \in J \text{ und } i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

in V enthalten ist, folgt $V = G$. Also ist G eine p-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die H enthält. Es folgt $H_p \subseteq G$, was zu zeigen war.

ii. Die Aussage folgt aus (2.9).

$\square$

Definition 2.7. i. *Es seien* $(\mathfrak{g}_1, [p]_1)$ *und* $(\mathfrak{g}_2, [p]_2)$ *zwei Lie-p-Algebren. Ein Lie-Algebren-Homomorphismus* $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *heißt p-Homomorphismus, wenn für alle* $x \in \mathfrak{g}_1$ *gilt:*
$$f(x^{[p]_1}) = f(x)^{[p]_2}$$

ii. *Eine p-Darstellung von* $(\mathfrak{g}, [p])$ *ist ein p-Homomorphismus* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(K)$.

Lemma 2.8. *Es sei* $(\mathfrak{g}, [p])$ *eine Lie-p-Algebra,* $\mathfrak{s}$ *eine Lie-Algebra und* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{s}$ *ein Lie-Algebren-Homomorphismus, dessen Kern ein p-Ideal ist. Dann existiert genau eine p-Abbildung auf* $f(\mathfrak{g})$ *derart, dass* $f : \mathfrak{g} \to f(\mathfrak{g})$ *ein p-Homomorphismus wird.*

Beweis. Für jedes y aus dem Bild von f wählen wir ein $x \in \mathfrak{g}$ mit $f(x) = y$ und setzen $y^{[p]} := f(x^{[p]})$. Angenommen $f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, so ist $x_1 - x_2$ im Kern von f. Es ist

$$\begin{aligned} x_1^{[p]} &= ((x_1 - x_2) + x_2)^{[p]} \\ &= (x_1 - x_2)^{[p]} + x_2^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x_1 - x_2, x_2). \end{aligned}$$

Da der Kern von f nach Voraussetzung ein p-Ideal ist, liegt $(x_1 - x_2)^{[p]}$ im Kern. Da man die $s_i(x_1 - x_2, x_2)$ durch Addition und Kommutatorbildung aus $x_1 - x_2$ und x_2 erhält, liegt auch

$$\sum_{i=1}^{p-1} s_i(x_1 - x_2, x_2)$$

im Kern von f, dann aber auch $x_1^{[p]} - x_2^{[p]}$. Daher ist $[p]$ wohldefiniert und man rechnet leicht nach, dass $[p]$ tatsächlich eine p-Abbildung ist. $\square$

Bemerkung 2.9. Ist I ein p-Ideal in einer Lie-p-Algebra $(\mathfrak{g}, [p])$, so können wir also den Quotient L/I zu einer Lie-p-Algebra und die natürliche Projektion $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ zu einem p-Homomorphismus machen, indem wir

$$(x + I)^{[p]} := x^{[p]} + I$$

setzen.

Es sei $\{e_i\}_{i \in I}$ eine Basis einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K mit positiver Charakteristik p. Nach (2.8) muss $ad(e_i)^p$ für jedes $i \in I$ eine innere Derivation sein, d.h. es gibt ein $x \in \mathfrak{g}$ so, dass $ad(e_i)^p = ad(x)$ ist. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend nach

Satz 2.10. *Es gebe zu jedem* $e_i \in I$ *ein Element* $u_i \in \mathfrak{g}$ *mit* $ad(e_i)^p = ad(u_i)$*. Dann existiert genau eine p-Abbildung* $[p] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *so, dass* $[p]$ *wie gegeben auf der Basis wirkt.*

Beweis. Wir folgen [8, S. 71 f.]. Es sei $\mathfrak{g}$ in $U(\mathfrak{g})$ eingebettet. Für $z \in U(\mathfrak{g})$ gilt

$$[e_i^p - u_i, z] = (ad(e_i)^p - ad(u_i))(z) = 0.$$

Setze nun

$$f : \mathfrak{g} \to Z(\mathfrak{g}),\ \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i_j} e_{i_j} \mapsto \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i_j}^p (u_{i_j} - e_{i_j}^p).$$

Dann ist f eine p-semilineare Abbildung. Betrachte

$$V := \{\, x \in \mathfrak{g} \mid x^p + f(x) \in \mathfrak{g} \,\}.$$

Es seien $x, y \in V$ und $\alpha \in K$. Dann liegt wegen

$$\begin{aligned}(\alpha x + y)^p + f(\alpha x + y) &= \alpha^p x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x, y) + \alpha^p f(x) + f(y) \\ &= \alpha^p (x^p + f(x)) + y^p + f(y)\end{aligned}$$

auch $(\alpha x + y)^p + f(\alpha x + y)$ in V. Also ist V ein Untervektorraum von $\mathfrak{g}$, der die Basis $\{e_i\}_{i \in I}$ enthält. Daher ist $V = \mathfrak{g}$ und man erhält die Abbildung

$$[p] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ x \mapsto x^p + f(x).$$

Aus $x^p - x^{[p]} = -f(x)$ folgt, dass dies eine p-Abbildung ist. Es gilt

$$e_i^{[p]} = e_i^p + f(e_i) = u_i.$$

Das zeigt die Behauptung. □

Beispiel 2.11. i. Wir betrachten die Lie-Algebra aus der Einführung

$$\mathfrak{g} := KE + KF, \quad [F, E] = E.$$

Dann gilt

$$ad(E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist durch

$$E^{[p]} = 0, \quad F^{[p]} = F$$

eine p-Abbildung definiert.

ii. Wir definieren die Witt-Algebra $W(1) = Ke_{-1} \oplus \ldots \oplus Ke_{p-2}$ durch

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j} & -1 \leq i+j \leq p-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In Kapitel 6 wird durch eine andere Konstruktion von $W(1)$ gezeigt, dass diese Formeln eine Lie-Algebra definieren. Man rechnet leicht aus, dass $ad(e_{-1})$ eine strikte obere Dreiecksmatrix, $ad(e_0)$ eine Diagonalmatrix und $ad(e_i)$ für $1 \leq i \leq p-2$ eine strikte untere Dreiecksmatrix ist. Da der Frobeniushomomorphismus auf $\mathbb{F}_p$ die Identität ist, erhält man

$$e_0^{[p]} = e, \quad e_i^{[p]} = 0 \text{ für alle } i \neq 0.$$

iii. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(K)$ mit $char(K) \neq 0$ ist eine Lie-p-Algebra. Die Elemente

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis. Es ist $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ und $[e, f] = h$. Man erhält für die adjungierten Darstellungen

$$ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deswegen definieren wir

$$e^{[p]} = f^{[p]} = 0, \quad \text{und} \quad h^{[p]} = h.$$

2.1 Jordan-Zerlegung in Lie-p-Algebren

Für einen Endomorphismus x eines endlichdimensionalen K-Vektorraums existiert die Jordan-Zerlegung $x = x_s + x_n$ in den nilpotenten und halbeinfachen Anteil von x.

Es sei $\mathfrak{s}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und $a \in \mathfrak{s}$. Dann heißt nach [6, S. 24] eine Zerlegung $a = s+n$ die abstrakte Jordan-Zerlegung von a, falls s und n kommutieren und $ad(a) = ad(s)+ad(n)$ die Jordan-Zerlegung von $ad(a)$ im Endomorphismenring $End_K(\mathfrak{s})$ ist. Ist $\mathfrak{s}$ halbeinfach, so wird in [6, S. 30] gezeigt, dass für jede Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(K)$, durch $\rho(a) = \rho(s) + \rho(n)$ die Jordan-Zerlegung von $\rho(a)$ gegeben ist.

Im Falle von Lie-p-Algebren erlaubt die p-Abbildung einen direkteren Zugang. Dieser entstammt [8, S. 77-83].

Definition 2.12. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-p-Algebra. Dann heißt $x \in \mathfrak{g}$ p-nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $x^{[p^k]} = 0$.*

Bevor wir zur Definition der Halbeinfachheit kommen, geben wir einige Aussagen über p-semilineare Abbildungen an:

Lemma 2.13. *Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ p-semilinear. Dann gilt:*

i. $ker(f)$ ist ein K-Untervektorraum von V.

ii. $f(V)$ ist ein K^p-Untervektorraum von W.

iii. $dim_K(V) = dim_K ker(f) + dim_{K^p} f(V)$

iv. Ist $W = \langle f(V) \rangle$ und $dim_K W = dim_K V$, so ist $ker(f) = 0$.

Beweis. Siehe [8, S. 78] □

Lemma 2.14. *Es sei $f : V \to V$ p-semilinear. Dann sind äquivalent:*

i. $V = \langle f(V) \rangle$

ii. Für alle $v \in V$ existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ so, dass $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i(v)$.

Beweis. Siehe [8, S. 79] □

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit positiver Charakteristik p und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(K)$ eine Lie-p-Algebra mit p-Abbildung $[p]$. Dann soll $x \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach sein, wenn es als Element von $M_n(K)$ diagonalisierbar ist.

Es sein x als Matrix diagonalisierbar. Dann ist x nicht nilpotent. Also hat $[p]$ einen trivialen Kern. Auf der wegen (2.9) abelschen p-Algebra $(Kx)_p = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} Kx^{[p^i]}$ ist nach (2.1) und (2.7) $[p]$ eine p-semilineare Abbildung. Da K als algebraisch abgeschlossener Körper perfekt ist, folgt aus Lemma 2.14, dass $[p]$ auf $(Kx)_p$ eine surjektive Abbildung ist. Daher liegt x in der p-Algebra $(Kx^{[p]})_p$.

Angenommen es lässt sich umgekehrt schreiben

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{[p^j]}, \quad \alpha_j \in K,$$

dann teilt das Minimalpolynom μ_x von $x \in M_n(K)$ das Polynom

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X^{p^j} - X =: f(X) \in K[X].$$

Es gibt daher ein Polynom $g \in K[X]$ mit $f = g\mu_x$. Differenzieren ergibt:

$$-1 = f' = g'\mu_x + g\mu_x'$$

Also ist $ggT(\mu_x, \mu_x') = 1$ und μ_x hat nur einfache Nullstellen. Das zeigt, dass x diagonalisierbar ist.

Definition 2.15. *Es sei $(\mathfrak{g}, [p])$ eine Lie-p-Algebra. Dann heißt $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, falls x in $(Kx^{[p]})_p$ enthalten ist.*

Bemerkung 2.16. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach und $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(K)$ eine p-Darstellung. Dann lässt sich $\rho(x)$ als Linearkombination der $\rho(x)^{[p^i]}$ mit $i \geq 1$ schreiben. Es folgt, dass $\rho(x)$ halbeinfach als Element von $M_n(K)$ ist.

Lemma 2.17. *Es sei $(\mathfrak{g}, [p])$ eine Lie-p-Algebra. Dann gilt:*

i. Sind x und y zwei kommutierende halbeinfache Elemente aus $\mathfrak{g}$, so ist auch $x + y$ halbeinfach.

ii. Ist $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist jedes $y \in (Kx)_p$ halbeinfach.

iii. Ist K perfekt und $[p]$ nicht singulär, d.h. es ist

$$x^{[p]} \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{g} - \{0\},$$

so ist jedes $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach.

Beweis. i. Da x und y kommutieren, ist die p-Abbildung $[p]$ wegen (2.1), (2.7) und (2.9) auf $V := (Kx + Ky)_p$ semilinear. Nach Voraussetzung sind x und y halbeinfach, liegen also beide in $\langle V^{[p]} \rangle$. Da $\langle V^{[p]} \rangle$ abgeschlossen unter der p-Abbildung $[p]$ ist, erhält man $V \subseteq \langle V^{[p]} \rangle \subseteq V$. Also ist $V = \langle V^{[p]} \rangle$ und aus Lemma 2.14 folgt die Behauptung.

ii. Es sei x halbeinfach. Dann ist $x^{[p^i]}$ halbeinfach für alle $i \in \mathbb{N}$. Ist nun

$$y = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{[p^i]} \in (Kx)_p,$$

so ist y nach dem ersten Teil halbeinfach.

iii. Auf $(Kx^{[p]})_p$ ist $[p]$ p-semilinear. K ist nach Voraussetzung perfekt und der Kern von $[p]$ enthält nur die 0. Aus Lemma 2.13 folgt:

$$\left(Kx^{[p]}\right)_p = \left(Kx^{[p]}\right)_p^{[p]}.$$

Also lässt sich schreiben

$$x^{[p]} = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{[p^j]}\right)^{[p]}, \quad \alpha_j \in K.$$

Auf der abelschen Algebra $(Kx)_p$ ist $[p]$ injektiv. Das zeigt die Behauptung.

□

Bemerkung 2.18. Wir machen bei iii. weiter. Ist also jedes Element x aus $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so lässt sich für alle $x \in \mathfrak{g}$ schreiben

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{[p^j]} = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{\frac{1}{p}} x^{[p]^{j-1}}\right)^{[p]}, \quad \alpha_j \in K,$$

wobei $\alpha_j^{\frac{1}{p}}$ eine p-te Wurzel bezeichne. Also ist $[p]$ surjektiv. Es gilt sogar die Äquivalenz der Aussagen

i. $[p]$ ist surjektiv

ii. $[p]$ ist nicht singulär und K ist perfekt

iii. $[p]$ ist injektiv und K ist perfekt

wie in [8, S. 83 f.] gezeigt wird. Die Nichtsingularität von $[p]$ ist eine sehr starke Eigenschaft. Falls man K als algebraisch abgeschlossen voraussetzt, impliziert sie, dass $\mathfrak{g}$ abelsch ist. (Siehe [8, S. 84 f.])

Wir können nun den Satz über die Jordan-Zerlegung für Lie-p-Algebren zeigen.

Satz 2.19. *Es sei $(\mathfrak{g}, [p])$ eine endlichdimensionale Lie-p-Algebra über einem perfekten Körper K mit char$(K) = p > 0$ und $x \in \mathfrak{g}$. Dann existieren eindeutig bestimmte Elemente x_s, $x_n \in \mathfrak{g}$, die die Bedingungen*

i. x_s ist halbeinfach, x_n ist p-nilpotent und *ii.* $x = x_s + x_n$, $[x_s, x_n] = 0$.

erfüllen.

Beweis. Da $\mathfrak{g}$ endlichdimensional ist, ist die Familie $\{x^{[p^i]}\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ linear abhängig. Also existieren ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha_i \in K$ mit

$$x^{[p^k]} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{[p^{k+i}]},$$

d.h. $x^{[p^k]}$ ist halbeinfach. Nach Lemma 2.17 ist jedes Element aus $V := (Kx^{[p^k]})_p$ halbeinfach. Die p-Abbildung $[p]$ ist auf V p-semilinear. Wir wenden Lemma 2.14 an und erhalten $V = \langle V^{[p]}\rangle$. Nach Lemma 2.13 ist $V^{[p]} = \langle V^{[p]}\rangle$. Insgesamt ergibt sich induktiv

$$V = V^{[p^k]} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also existiert ein $x_s \in V$ (und ist damit halbeinfach) mit $x^{[p^k]} = x_s^{[p^k]}$. Wegen $[x, V] = 0$, sieht man, dass $x_n := x - x_s$ p-nilpotent und $[x_n, x_s] = 0$ ist.

Angenommen es sei eine Zerlegungen $x = x_s + x_n$ mit i. und ii. gegeben. Dann gilt für ein $m \in \mathbb{N}$

$$x^{[p^m]} = x_s^{[p^m]}. \tag{2.10}$$

Da x_s halbeinfach ist, folgt $(Kx_s)_p^{[p^m]} = (Kx_s)_p$. Daher gibt es ein $\tilde{x} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_s^{[p^j]}$ in $(Kx_s)_p$ derart, dass

$$x_s = \tilde{x}^{[p^m]} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{p^m} x_s^{[p]^{j+m}}$$

gilt. Zusammen mit (2.10) folgt:

$$x_s \in \left(Kx_s^{[p^m]}\right)_p \subseteq (Kx)_p \,.$$

Dann ist auch $x_n = x - x_s \in (Kx)_p$.

Es sei nun eine weitere Zerlegung $x = x'_s + x'_n$, die die Bedingungen i. und ii. erfüllt, gegeben. Da $(Kx)_p$ abelsch ist, haben wir gezeigt, dass die Lie-Klammern $[x_s, x'_s]$ und $[x_n, x'_n]$ verschwinden. Daher ist $x'_n - x_n = x_s - x'_s$ p-nilpotent und halbeinfach nach Lemma 2.17. Dann ist $x'_n - x_n = 0$. Sonst kann für m minimal mit $(x'_n - x_n)^{[p^m]} = 0$, $(x'_n - x_n)^{[p^{m-1}]}$ nicht halbeinfach sein. □

3 Darstellungen von Lie-Algebren in positiver Charakteristik

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit positiver Charakteristik $p > 0$. Wir werden zeigen, dass zu jedem $x \in \mathfrak{g}$ ein nicht konstantes Polynom $f \in K[X]$ existiert, für welches $f(x)$ im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$ liegt. Unter anderem folgern wir hieraus, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung einer Lie-p-Algebra endlichdimensional ist. Es werden die Begriffe noethersch, endliche Ringerweiterung und Ringerweiterungen von endlichem Typ vorausgesetzt. Desweiteren wird eine schwache Version des Hilbertschen Nullstellensatzes benötigt: Ist $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal in $K[X_1, \dots, X_n]$, so existieren $a_1 \dots, a_n \in K$ derart, dass $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ ist. Ein Polynom der Form $a_m X^{p^m} + \dots + a_0 X$ heißt p-Polynom. Wir folgen zu Beginn [7, S. 357 ff.].

Lemma 3.1. *Jedes Polynom $0 \neq f \in K[X]$ ist ein Teiler eines geeigneten p-Polynoms aus $K[X]$.*

Beweis. Es sei $0 \neq f \in K[X]$. Wir dividieren für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ das Monom X^{p^i} mit Rest durch f und erhalten

$$X^{p^i} = f q_i + r_i, \quad r_i, q_i \in K[X] \text{ mit } deg(r_i) < deg(f).$$

Wegen $deg(r_i) < deg(f)$, ist die Familie $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ linear abhängig. Also existieren $\alpha_i \in K$, nicht alle 0, so, dass $\sum_{i=0}^n \alpha_i r_i = 0$ ist. Daraus folgt

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^{p^i} = f \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q_i,$$

was zu zeigen war. □

Es sei nun $x \in \mathfrak{g}$. Wir betrachten $ad(x) \in End_K(\mathfrak{g})$. Da $\mathfrak{g}$ endlichdimensional ist, existiert das charakteristische Polynom χ zu $ad(x)$ und nach Cayley-Hamilton ist $\chi(ad(x)) = 0$. Man beachte, dass χ nicht konstant ist. Nach dem obigen Lemma gibt es also ein p-Polynom $0 \neq f = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^{p^i} \in K[X]$, das von χ geteilt wird. Also ist auch $f(ad(x)) = 0$. Es sei $a \in \mathfrak{g}$ gegeben. Wir betten $\mathfrak{g}$ in $U(\mathfrak{g})$ ein und rechnen:

$$ad(a)(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i ad(a)(x^{p^i}) = -\sum_{i=0}^{n} \alpha_i ad(a)^{p^i}(x) = 0$$

Daher liegt $f(x)$ im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$. Da wir ohne Einschränkung f als normiert annehmen können, haben wir bewiesen:

Lemma 3.2. *Für alle $x \in \mathfrak{g}$ existiert ein normiertes, nicht konstantes Polynom $f \in K[X]$ so, dass $f(x)$ im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$ liegt.*

Als erste Folgerung konstruieren wir eine treue endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. Dazu sei $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Wir wählen zu jedem e_i ein normiertes Polynom $f_i \in K[X]$ so, dass $f_i(e_i)$ im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$ liegt und setzen

$$y_i \coloneqq f_i(e_i). \tag{3.1}$$

Es sei $f_i = \sum_{j=0}^{n_i} \alpha_{ij} X^j$. Dann ist $e_i^{n_i} = f_i(e_i) - \sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{ij} e^j$. Also zeigt Lemma 1.12, dass die Menge

$$\left\{ y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n} e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n} \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq \alpha_i < n_i \right\} \tag{3.2}$$

eine Basis von $U(\mathfrak{g})$ ist. Es sei I, das von den y_i erzeugte Ideal in $U(\mathfrak{g})$. Dann ist

$$\{ e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n} \mid 0 \leq \alpha_i < n_i \}$$

eine Basis von $U(\mathfrak{g})/I$. Insbesondere ist $U(\mathfrak{g})/I$ endlichdimensional. Liegt $f_i(e_i)$ im Zentrum von $U(\mathfrak{g})$, so auch $f_i^2(e_i)$. Wir können also für alle $i \in I$ annehmen, dass $deg(f_i) > 1$ ist. Dann sind insbesondere die Nebenklassen $e_i + I$ linear unabhängig. Die Einschränkung der natürlichen Projektion $\pi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})/I$ auf $\mathfrak{g}$ ist aus Dimensionsgründen injektiv, d.h. wir können $\mathfrak{g}$ in $U(\mathfrak{g})/I$ einbetten. Da $U(\mathfrak{g})/I$ die 1 enthält, definiert die Rechtsmultiplikation auf $U(\mathfrak{g})/I$ eine treue Darstellung von $U(\mathfrak{g})/I$. Durch Einschränkung erhält man eine endlichdimensionale treue Darstellung von $\mathfrak{g}$. Im Falle von $char(K) = 0$ ist die Existenz einer endlichdimensionalen treuen Darstellung als Satz von Ado bekannt. (siehe [2, S. 202])

Wir kommen nun zu zwei Unterschieden zwischen der Darstellungstheorie in Charakteristik 0 und p. Ist $char(K) = 0$ und $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so sagt der Satz von Weyl, dass jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ vollständig reduzibel ist, d.h. in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerfällt. Wir zeigen aber für $char(K) = p > 0$ den

Satz 3.3. *Jede endlichdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper mit positiver Charakteristik besitzt eine endlichdimensionale Darstellung, die nicht vollständig reduzibel ist.*

Der Beweis verwendet ein Lemma, welches unabhängig von der Charakteristik des Körpers K ist und direkt aus den Definitionen folgt.

Lemma 3.4. *Es sei $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra von Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Ist $\mathcal{A}$ vollständig reduzibel, so ist $\mathcal{A}$ halbeinfach, d.h. das maximale nilpotente Ideal in $\mathcal{A}$ ist das Nullideal.*

Beweis. [2, S. 47] □

Beweis von Satz 3.3. Wir wählen y_i wie in (3.1). Jetzt sei aber I, das von $y_1^2, y_2, \ldots, y_n$ erzeugte Ideal in $U(\mathfrak{g})$. Dann ist $\mathfrak{g}$ in $U(\mathfrak{g})/I$ eingebettet. $y_1 + I \in U(\mathfrak{g})/I$ ist ein zentrales nilpotentes Element. Daher ist das von $y_1 + I$ erzeugte Ideal in $U(\mathfrak{g})/I$ nilpotent. Also ist $U(\mathfrak{g})/I$ nicht halbeinfach. Wegen Lemma 3.4 ist dann jede treue Darstellung von $U(\mathfrak{g})/I$ nicht vollständig reduzibel. Dann besitzt aber auch $\mathfrak{g}$ eine nicht vollständig reduzible treue Darstellung. □

Wir untersuchen nun das Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ näher. Es werden Beweisideen aus [8, S. 203]verwendet und Aussagen aus [12, S. 952] gezeigt.

Aus (3.2) folgt, dass $U(\mathfrak{g})$ ein freier Modul von endlichem Rang über dem Polynomring $R := K[y_1, \ldots, y_n]$ ist. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist R noethersch. Also ist $U(\mathfrak{g})$ ein endlich erzeugter noetherscher R-Modul. Da die y_i im Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ liegen, ist $Z(\mathfrak{g})$ ein R-Untermodul und daher endlich erzeugt. Wir haben also einen Turm von Ringerweiterungen:

$$K \subseteq R \subseteq Z(\mathfrak{g}).$$

Die erste ist von endlichem Typ und die zweite ist endlich. Also ist die Erweiterung $K \subseteq Z(\mathfrak{g})$ von endlichem Typ, d.h. $Z(\mathfrak{g})$ ist eine endlich erzeugte K-Algebra. Damit zeigen wir den

Satz 3.5. *Ist $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik $p > 0$, so ist jeder irreduzible $\mathfrak{g}$-Modul endlichdimensional.*

Beweis. Der Beweis ist [3, S. 2] und [4, S. 3] entnommen. Wir können $u_1, \ldots, u_r \in U(\mathfrak{g})$ finden mit

$$U(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{r} Z(\mathfrak{g}) u_i.$$

Es sei ein irreduzibler $\mathfrak{g}$-Modul E gegeben und $0 \neq v \in E$. Dann ist

$$E = U(\mathfrak{g})v = \sum_{i=1}^{r} Z(\mathfrak{g}) u_i v,$$

d.h. E ist ein endlich erzeugter $Z(\mathfrak{g})$-Modul. $Z(\mathfrak{g})$ ist aber eine endlich erzeugte K-Algebra, also isomorph zu einem Quotienten eines Polynomrings. Daher ist $Z(\mathfrak{g})$ noethersch.

Es existiert also ein maximaler echter $Z(\mathfrak{g})$-Untermodul $E' \subseteq E$. Dann ist E/E' ein einfacher $Z(\mathfrak{g})$-Modul. Man erinnere sich, dass einfache Moduln über einem Ring O immer isomorph zu einem Quotienten $O/\mathfrak{m}$ sind, wobei $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal in O ist. In Formeln gilt also:

$$E/E' \cong_{Z(\mathfrak{g})} Z(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}$$

für ein Maximalideal in $Z(\mathfrak{g})$. Ist $x \in \mathfrak{m}$ und $e \in E$, so ist also $x(e + E') = 0$. Daher ist xE in E' enthalten. Da x ein zentrales Element von $U(\mathfrak{g})$ ist, ist xE ein $U(\mathfrak{g})$-Untermodul. Er ist in E' enthalten. Dann muss aber, wegen der Irreduziblität von E, $xE = 0$ sein. Da $Z(\mathfrak{g})$ eine K-Algebra von endlichem Typ ist, existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und ein Ideal J in $K[X_1, \ldots, X_m]$ mit $Z(\mathfrak{g}) \cong K[X_1, \ldots, X_m]/J$. Die Maximalideale in $Z(\mathfrak{g})$ sind genau die Maximalideale über J in $K[X_1, \ldots, X_m]$. Nach einer schwachen Version des Hilbertschen Nullstellensatzes existieren daher $a_1, \ldots, a_m \in K$ so, dass $\mathfrak{m} \cong (X_1 - a_1, \ldots, X_m - a_m)/J$ ist. Mit dem zweiten Isomorphiesatz folgt $Z(\mathfrak{g}) \cong K$. Also ist $Z(\mathfrak{g}) = K1 + \mathfrak{m}$. Es folgt

$$E = \sum_{i=1}^{r} Z(\mathfrak{g})u_i v = \sum_{i=1}^{r} K u_i v.$$

Die Dimension von E muss daher kleiner als $r+1$ sein. Man beachte, dass diese Schranke unabhänging von E ist. □

Bemerkung 3.6. Schon $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ besitzt sowohl irreduzible Darstellungen beliebiger endlicher Dimension, als auch unendlich dimensionale irreduzible Darstellungen. Die folgende Konstruktion stammt aus [5, S. 73] und [6, S. 34].

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und M_λ der $\mathbb{C}$-Vektorraum mit der abzählbaren Basis $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$. M_λ wird durch

$$\begin{aligned} hv_k &= (\lambda - 2k)v_k \\ fv_k &= (k+1)v_{k+1} \\ ev_k &= \begin{cases} (\lambda - k + 1)v_{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

zu einem $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Modul, wobei $\{e, f, h\}$ die Basis aus Beispiel 2.11 sei. Dazu genügt es alle Identitäten der Form $hv_k = [e, f]v_k = efv_k - fev_k$ zu überprüfen. Wir beobachten, dass für $m := \lambda + 1 \in \mathbb{N}_0$ der von den Vektoren $v_m, v_{m+1}, \ldots$ aufgespannte Untervektorraum W eine Unterdarstellung ist. Damit ist dann auch V/W eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Beide Darstellungen sind irreduzibel. Denn durch wiederholte Anwendung von e auf einen Vektor aus einer Unterdarstellung von W bzw. V/W, erhält man ein Vielfaches von v_m bzw. v_0. Jetzt wendet man f wiederholt an und erhält die Basis $v_m, v_{m+1}, \ldots$ von W bzw. die Basis $\overline{v_0}, \ldots, \overline{v_{m-1}}$ von V/W. In [5, S. 73 f.] wird gezeigt, dass bis auf Isomorphie keine weiteren endlichdimensionalen irredzuziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ existieren.

Die folgenden Definitionen und Aussagen sind [8, S. 207-213] entnommen.

Korollar und Definition 3.7. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-p-Algebra über K und $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(K)$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$. Dann existiert eine Linearform $\chi \in \mathfrak{g}^*$, genannt Charakter der Darstellung ρ, derart, dass gilt:*

$$\rho(x)^p - \rho(x^{[p]}) = \chi(x)^p id_V \quad \textit{für alle } x \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Da nach Satz 3.5 V endlichdimensional ist, besitzt jeder der Endomorphismen $\rho(x) - \rho(x^{[p]})$ einen Eigenwert $\alpha(x)$ in K. Es ist für $a \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}[\rho(x^{[p]}), \rho(a)] &= \rho([x^{[p]}, a]) = \rho(ad(x)^p(a)) \\ &= ad(\rho(x))^p(\rho(a)) = [\rho(x)^p, \rho(a)].\end{aligned}$$

Also ist $[\rho(x)^p - \rho(x^{[p]}) - \alpha(x)id_V, \rho(\mathfrak{g})] = 0$. Daher ist $ker(\rho(x)^p - \rho(x^{[p]}) - \alpha(x)id_V)$ ein nichttrivialer Untervektorraum von V. Also ist er gleich V.

Die Abbildung $\rho(x)^p - \rho(x^{[p]})$ ist p-semilinear. Daher ist $\alpha(x)$ p-semilinear. Das zeigt, dass die Abbildng $\chi(x) := \alpha(x)^{1/p}$ linear ist. □

Ist eine Linearform $\chi \in \mathfrak{g}^*$ gegeben, so hätte man gerne einen Modul mit Charakter χ. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}),\ x \mapsto x^p - x^{[p]} - \chi(x)^p.$$

Dann liegt das Bild von ψ nach der Definition 2.1 der p-Abbildung im Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$. Außerdem ist ψ semilinear. Es sei $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Wir betrachten das von den $\psi(e_i)$ erzeugte Ideal. Mit Lemma 1.12 sieht man, dass durch

$$\left\{ e_1^{\lambda_1} \ldots e_n^{\lambda_n} + I \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i < p \right\}$$

eine Basis von $U(\mathfrak{g})/I$ gegeben ist und sich $\mathfrak{g}$ in $U(\mathfrak{g})/I$ einbetten lässt. Es sei i die Einschränkung der natürlichen Projektion $\pi : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})/I$ auf $\mathfrak{g}$. Das Tupel $(U(\mathfrak{g})/I, i)$

erfüllt eine universelle Eigenschaft.

Satz 3.8. *Ist eine assoziative K-Algebra $\mathcal{A}$ und ein Homomorphismus $f : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}^-$ mit*

$$f(x)^p - f(x^{[p]}) = \chi(x)^p 1 \quad \textit{für alle } x \in \mathfrak{g}$$

gegeben, so existiert genau ein Homomorphismus $\overline{f} : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ mit $\overline{f} = f \circ i$.

Beweis. Sind $\mathcal{A}$ und f wie gefordert gegeben, so existiert nach der universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$ ein assoziativer Homomorphismus $\tilde{f} : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$, der f fortsetzt. Da $\tilde{f}$ linear ist und die 1 auf die 1 abbildet, folgt:

$$\tilde{f}(x^p - x^{[p]} - \chi(x)^p) = f(x)^p - f(x^{[p]}) - \chi(x)^p 1 = 0.$$

Also existiert ein Homomorphismus $\overline{f} : U(\mathfrak{g})/I \to \mathcal{A}$. $\overline{f}$ ist eindeutig bestimmt, da $U(\mathfrak{g})/I$ als Algebra von $i(\mathfrak{g})$ erzeugt wird. □

Definition 3.9. *Es sei $U_\chi(\mathfrak{g})$ eine assoziative Algebra und $i : \mathfrak{g} \to U_\chi(\mathfrak{g})^-$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus mit*

$$i(x) - i(x^{[p]}) = \chi(x)^p 1 \quad \textit{für alle } x \in \mathfrak{g}$$

Erfüllt $(U_\chi(\mathfrak{g}), i)$ die universelle Eigenschaft aus Satz 3.8*, so heißt $(U_\chi(\mathfrak{g}), i)$ die reduzierte universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}$.*

Bemerkung 3.10. Wie in Lemma 1.4 zeigt man, dass sich auf jedem $\mathfrak{g}$-Modul V genau eine Modulstruktur $\bullet$ definieren lässt mit $av = i(a) \bullet v$ für alle $a \in \mathfrak{g}$ und alle $v \in V$. $W \subseteq V$ ist genau dann ein $\mathfrak{g}$-Untermodul, wenn er ein $U_\chi(\mathfrak{g})$-Untermodul ist.

Es sei τ ein p-Automorphismus, d.h. es ist $\tau(x^p) = \tau(x^{[p]})$ für alle x in $\mathfrak{g}$ und τ ist ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Wir untersuchen, wie τ auf den Charakter χ wirkt. Dabei folgen wir [3, S. 5]. Nach Satz 1.3 setzen sich τ und τ^{-1} auf $U(\mathfrak{g})$ fort. Aus dem Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem folgt daher, dass sich τ zu einem assoziativen Automorphismus $\overline{\tau}$ von $U(\mathfrak{g})$ fortsetzen lässt. Es sei I wieder das Ideal in $U(\mathfrak{g})$, welches von den Termen $x^p - x^{[p]} - \chi(x)^p$ erzeugt wird, sodass $U(\mathfrak{g})/I = U_\chi(\mathfrak{g})$ ist. I wird aber auch von den Termen

$$\tau^{-1}(y)^p - \tau^{-1}(y)^{[p]} - \chi(\tau^{-1}(y))^p, \quad y \in \mathfrak{g}$$

erzeugt und es ist

$$\overline{\tau}\left(\tau^{-1}(y)^p - \chi(\tau^{-1}(y))^p\right) = y^p - y^{[p]} - \chi(\tau^{-1})^p.$$

Also erhalten wir mit dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $U_\chi(\mathfrak{g}) \cong U_{\chi\circ\tau^{-1}}(\mathfrak{g})$.

Beispiel 3.11. ([3, S. 11]) Es sei ein irreduzibler $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul V gegeben. Nach Korollar 3.7 existiert eine Linearform $\chi \in \mathfrak{g}^*$ so, dass V ein irreduzibler $U_\chi(\mathfrak{g})$-Modul ist. Wir möchten nun einen p-Automorphismus derart finden, dass $\chi \circ \tau^{-1}$ eine möglichst einfache Gestalt hat. Es sei

$$f_Y : \mathfrak{gl}_2(K) \to \mathfrak{sl}_2(K)^*, \; X \mapsto tr(XY).$$

Die Bilinearform $(X,Y) \mapsto tr(XY)$ ist auf $\mathfrak{gl}_2(K)$ nicht ausgeartet. Also ist f_Y eine surjektive Abbildung. Es sei $y_0 \in \mathfrak{gl}_2(K)$ mit $f_{Y_0} = \chi$. Wir lassen $GL_2(K)$ durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}_2(K)$ operieren. Dabei wird wegen $tr(Y^{-1}XY) = tr(YY^{-1}X)$, $\mathfrak{sl}_2(K)$ auf sich selbst abgebildet. Es sei τ die Konjugation mit $A \in GL_2(K)$. Es folgt für alle $X \in \mathfrak{sl}_2(K)$

$$\begin{aligned} f_{\tau(Y_0)}(X) &= tr(AY_0A^{-1}X) \\ &= tr(Y_0A^{-1}XA) \\ &= f_{Y_0} \circ \tau^{-1}(X) \\ &= \chi \circ \tau^{-1}(X). \end{aligned}$$

Bekanntlich kann Y_0 durch Konjugation auf eine der beiden Formen

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{mit } r, s \in K$$

gebracht werden. Diese werden nun auf die Linearformen

$$\chi_s : \quad \begin{aligned} e &\mapsto 0 \\ f &\mapsto 0 \\ h &\mapsto r - s \end{aligned} \qquad \text{und} \quad \chi_n : \quad \begin{aligned} e &\mapsto 0 \\ f &\mapsto 1 \\ h &\mapsto 0 \end{aligned}$$

abgebildet. Es wird also genügen die irreduziblen $U_{\chi_s}(\mathfrak{g})$- und $U_{\chi_n}(\mathfrak{g})$-Moduln zu bestimmen.

4 Induzierte Moduln

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Übersicht über induzierte Moduln. Dabei halten wir uns an [8, S. 224-228], [3, S. 7 f.] und [13]. Die Beweise werden größtenteils ausgelassen. Sie verlaufen sämtlich analog zu denjenigen für Moduln über kommutativen Ringen.

Es sei $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra einer endlichdimensionalen Lie-p-Algebra $\mathfrak{g}$ und χ eine Linearform auf $\mathfrak{g}$. Dann lässt sich nach unserer Konstruktion der reduzierten einhüllenden Algebra $U_\chi(\mathfrak{g})$, $U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$ in $U_\chi(\mathfrak{g})$ einbetten. Ist ein $U_\chi(\mathfrak{g})$-Modul V gegeben, so ist V auch ein $U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$-Modul. Das ist der Vergissfunktor

$$\{U_\chi(\mathfrak{g}) - Moduln\} \to \{U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s}) - Moduln\}.$$

Als Funktor in die andere Richtung wird sich das Tensorprodukt mit $U_\chi(\mathfrak{g})$ ergeben.

Definition 4.1. *Es seien R und S zwei assoziative K-Algebren. Dann heißt ein Vektorraum M ein R-S-Bimodul, falls M ein S-Linksmodul und ein R-Rechtsmodul ist und $r(ms) = (rm)s$ für alle $r \in R$, $s \in S$ und $m \in M$ gilt.*

Es sei M ein S-Linksmodul und M ein S-Rechtsmodul. Wir wollen das Tensorprodukt von M mit N definieren.

Definition 4.2. *Es sei T ein K-Vektorraum.*

i. Eine K-bilineare Abbildung $f : M \times N \to T$ mit $f(ms, n) = f(m, sn)$ für alle $s \in S, m \in M$ und $n \in N$ heißt S-ausgewogen.

ii. Es sei $f : M \times N \to T$ eine K-bilineare S-ausgewogene Abbildung. Dann heißt (T, f) Tensorprodukt von M und N, wenn für jedes andere Tupel (P, g), bestehend aus einem K-Vektorraum P und einer S-ausgewogenen Abbildung $g : M \times N \to P$, genau eine lineare Abbildung $h : T \to P$ existiert, für welche $h \circ f = g$ ist.

Wie üblich ist das Tensorprodukt eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie und wir schreiben $M \otimes_S N$. Ist M noch zusätzlich ein R-Rechtsmodul, so existiert genau eine R-Modulstruktur auf $M \otimes_S N$ mit $r(m \otimes n) = (rm) \otimes n$ für $r \in R$, $m \in M$ und $n \in N$. Denn die Abbildung, die (m, n) auf $(rm) \otimes n$ abbildet, ist S-ausgewogen und K-bilinear. Es sei ein $U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$-Modul V gegeben. Dann ist, wenn wir $U_\chi(\mathfrak{g})$ als $U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$-$U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$-Bimodul betrachten,

$$ind_\chi(V) := U_\chi(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})} V$$

ein $U_\chi(\mathfrak{g})$-Modul. Damit ist $ind_\chi(\cdot)$ der gesuchte Funktor. Solche Moduln heißen induzierte Moduln. Sind $m_1, \ldots, m_r$ eine Basis von V und $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ derart, dass $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von $\mathfrak{s}$ bilden, so lässt sich zeigen, dass

$$\left\{ e_{m+1}^{\lambda_1} \ldots e_n^{\lambda_n} \otimes m_i \;\middle|\; 0 \leq \lambda_j < p, 1 \leq r \right\}$$

eine Basis von $ind_\chi(V)$ ist. Es ist $ind_\chi(\cdot)$ linksadjungiert zu obigem Vergissfunktor.

Lemma 4.3 (Frobenius Reziprozität). *Für einen $U_\chi(\mathfrak{g})$-Modul V und einen $U_{\chi|_\mathfrak{s}}(\mathfrak{s})$-Modul M gilt*

$$Hom_\mathfrak{g}(ind_\chi(V), M) \cong Hom_\mathfrak{s}(V, M).$$

5 Irreduzible Darstellungen der Lie-p-Algebra $\mathfrak{sl}_2(K)$

Wir betrachten die Lie-p-Algebra $\mathfrak{sl}_2(K)$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit Charkteristik $p > 2$. Sie hat die Basis e, f und h und die p-Abbildung ist nach Beispiel 2.11 durch

$$e^{[p]} = f^{[p]} = 0, \quad h^{[p]} = h$$

gegeben. Ziel ist es ihre irreduziblen Darstellungen zu klassifizieren. Dies geschieht wie in [3, S. 11 f.].

Es sei V ein irreduzibler $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul und $\rho : \mathfrak{sl}_2(K) \to \mathfrak{gl}_2(V)$ die zugehörige Darstellung. In Beispiel 3.11 hatten wir schon festgestellt, dass es genügt die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von $U_{\chi_s}(\mathfrak{sl}_2(K))$ und $U_{\chi_n}(\mathfrak{sl}_2(K))$ zu finden. Dabei waren χ_n und χ_s durch

$$\chi_s : \begin{array}{l} e \mapsto 0 \\ f \mapsto 0 \\ h \mapsto r - s \end{array} \qquad \text{und} \qquad \chi_n : \begin{array}{l} e \mapsto 0 \\ f \mapsto 1 \\ h \mapsto 0 \end{array}$$

gegeben. Es sei deshalb die Linearform $\chi \in \mathfrak{g}^*$ immer gleich χ_n oder gleich χ_s. Dann ist $\chi(e) = 0$. Wegen $e^{[p]} = 0$ folgt daraus, $e^p = 0$. Also ist $ker(\rho(e)) \neq \{0\}$. h bildet den Kern von $\rho(e)$, wegen $[h, e] = 2e$, in sich selbst ab. Da V nach Satz 3.5 endlichdimensional ist, existiert ein $0 \neq v_0 \in V$ und ein $\lambda \in K$ mit $ev_0 = 0$ und $hv_0 = \lambda v_0$. Da χ der Charakter der Darstellung ρ ist, folgt

$$\lambda^p - \lambda = \chi(h)^p. \tag{5.1}$$

Es gibt also nur p Möglichkeiten für $\lambda \in K$. Der Untervektorraum $Kv_0 \subseteq V$ ist ein $U_\chi(Kh+Ke)$-Untermodul des $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Moduls V. Wir bilden den induzierten Modul

$$Z_\chi(\lambda) \coloneqq ind_\chi(Kv_0) = U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K)) \otimes_{U_\chi(Kh+Ke)} Kv_0.$$

Es sei $\tilde{\rho} : U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K)) \to End_K(Z_\chi(\lambda))$ die zum $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul $Z_\chi(\lambda)$ assoziierte Darstellung.

Die Inklusion $Kv_0 \hookrightarrow V$ liefert nach der Frobenius Reziprozität Lemma 4.3 einen $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul-Homomorphismus

$$\psi : Z_\chi(\lambda) \to V, \quad \psi \neq 0. \tag{5.2}$$

Da V irreduzibel ist, muss ψ eine Surjektion sein. Nach Abschnitt 4.3 ist die Menge $\{ v_i \coloneqq f^i \otimes v_0 \mid 0 \leq i < p \}$ eine Basis von $Z_\chi(\lambda)$. Analog wie in Charakteristik 0 zeigt man mit vollständiger Induktion die Formeln

$$hv_i = (\lambda - 2i)v_i \tag{5.3}$$

$$ev_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i(\lambda - i + 1) & i > 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

$$fv_i = \begin{cases} v_{i+1} & i < p-1 \\ \chi(f)^p v_0 & i = p-1 \end{cases} \tag{5.5}$$

Für die letzte Gleichung beachte man, dass wegen $f^{[p]} = 0$, $f^p = \chi(f)^p$ ist.

Erster Fall. $\chi = \chi_s \neq 0$. Dann ist $\chi(h) \neq 0$. Also liegt λ wegen (5.1) nicht in $\mathbb{F}_p$. Daher ist $i(\lambda - i + 1) \neq 0$ für alle $0 \leq i < p$. Es ist also $\{ v \in Z_\chi(\lambda) \mid ev = 0 \} = Kv_0$. Ist $W \subseteq Z_\chi(\lambda)$ ein irreduzibler $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Untermodul, so folgt aus (5.4), dass er einen Vektor v enthält mit $ev = 0$. Dann erhält man aber durch die Anwedung von f auf v, dass $W = Z_\chi(\lambda)$ ist. Da also $Z_\chi(\lambda)$ irreduzibel ist, muss ψ einen trivialen Kern haben, ist also injektiv. Jeder irreduzible $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul ist deshalb isomorph zu einem der Moduln $Z_\chi(\lambda)$.

Umgekehrt lässt sich zu jedem λ, welches die Gleichung (5.1) erfüllt, ein eindimensionaler $U_\chi(Kh+Ke)$-Modul $K_\lambda \coloneqq Kw$ definieren, indem man $ew = 0$ und $hw = \lambda w$ setzt. Dieser Modul induziert einen $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul. Er ist nach demselben Argument wie eben irreduzibel. Es ist λ eindeutig als Eigenwert von $\tilde{\rho}(h)$ auf dem eindimensionalen Kern von $\tilde{\rho}(e)$ festgelegt, d.h. es kann für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in K$, die (5.1) erfüllen, keinen Isomorphismus zwischen $Z_\chi(\lambda_1)$ und $Z_\chi(\lambda_2)$ geben. Für $\chi = \chi_s \neq 0$ gibt es daher genau p Isomorphieklassen. Diese sind eindeutig durch eine Lösung von (5.1) bestimmt.

Zweiter Fall. $\chi = \chi_n \neq 0$. Dann ist $\chi(h) = 0 = \chi(e)$ und $\chi(f) = 1$. Die Gleichungen (5.4), (5.5) und (5.3) zeigen, dass die v_i Eigenvektoren von $\tilde{\rho}(h)$ sind. Die zugehörigen Eigenwerte sind paarweise verschieden. Alle Eigenräume sind daher eindimensional. Deswegen enthält jeder $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Untermoduln $W \subseteq Z_\chi(\lambda)$ einen der Eigenvektoren v_i von $\tilde{\rho}(h)$. Dann ist aber, wegen $v_0 = f^{p-i}v_i$, bereits $W = V$. (Beachte $fv_{p-1} = v_0$). Also ist $Z_\chi(\lambda)$ irreduzibel.

Wie in Fall 1 liefert umgekehrt jedes λ mit (5.1) einen irreduziblen Modul $Z_\chi(\lambda)$. Jetzt ist aber der Kern von $\tilde{\rho}(e)$ unter Umständen nicht mehr eindimensional und es lassen sich Isomorphismen zwischen den irreduziblen $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Moduln $Z_\chi(\lambda)$ finden. Dazu stellen wir fest, dass wegen $\chi(h) = 0$, λ Werte in $\mathbb{F}_p$ annimmt. Aus Gleichung (5.4) folgt

$$ker(\tilde{\rho}(e)) = \begin{cases} Kv_0 + Kv_{\lambda+1} & 0 \leq \lambda \leq p-2 \\ Kv_0 & \lambda = p-1 \ . \end{cases}$$

Wir betrachten den eindimensionalen Untervektorraum $Kv_{\lambda+1}$ in $Z_\chi(\lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{F}_p$ mit $0 \leq \lambda \leq p-2$. Er ist ein $U_\chi(Kh + Ke)$-Untermodul und vollständig durch die Formeln

$$\begin{aligned} hv_{\lambda+1} &= (\lambda - 2(\lambda+1))v_{\lambda+1} \\ &= -(\lambda+2)v_{\lambda+1} \\ &= (p-\lambda-2)v_{\lambda+1} \\ ev_{\lambda+1} &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Dann ist er aber isomorph zum $U_\chi(Kh + Ke)$-Modul $Kv_0 \subseteq Z_\chi(p-\lambda-2)$. Wir kriegen daher eine Abbildung

$$Z_\chi(p-\lambda-2) \supseteq Kv_0 \to Z_\chi(\lambda) \supseteq Kv_{\lambda+1}$$

Aus der Frobenius Reziprozität Lemma 4.3 folgt die Existenz von

$$\delta : Z_\chi(p-\lambda-2) \to Z_\chi(\lambda), \quad \delta \neq 0.$$

δ muss ein Isomorphismus sein, da beide Moduln nach Obigem irreduzibel sind. Ist also ein irreduzibler $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul $Z_\chi(\lambda)$ gegeben, so ist der Kern von $\tilde{\rho}(e)$ entweder eindimensional, dann ist λ durch den Eigenwert von $\tilde{\rho}(h)$ auf $ker(\tilde{\rho}(e))$ eindeutig festgelegt, oder zweidimensional, dann ist λ einer der beiden Eigenwerte μ_1, μ_2 von $\tilde{\rho}(h)$ auf $ker(\tilde{\rho}(e))$ und es ist $Z_\chi(\mu_1) \cong Z_\chi(\mu_2) \cong Z_\chi(\lambda)$. Daraus folgt, dass wir alle Isomorphismen zwischen den $Z_\chi(\lambda)$ gefunden haben. Für $\chi = \chi_n \neq 0$ gibt es daher genau $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ Isomorphieklassen irreduzibler $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Moduln.

Dritter Fall. $\chi = 0$. Jetzt ist $\lambda \in \mathbb{F}_p$ und der Kern von $\tilde{\rho}(e)$ eindimensional. Nach (5.2) ist unser zu Beginn vorgegebener irreduzibler $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul V isomorph zu $Z_0(\lambda)/ker(\psi)$. Der einzige irreduzible Untermodul W von $Z_0(\lambda)$ ist jedoch der von den linear unabhängigen Vektoren $v_{\lambda+1}, \ldots, v_{p-1}$ mit $-1 \leq \lambda \leq p-2$ aufgespannte Unterraum. Daher ist $W \cong V$. Umgekehrt erhält man wieder zu jedem $-1 \leq \lambda \leq p-2$ den $U_0(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul $Z_0(\lambda)$, sodass der von $v_{\lambda+1}, \ldots, v_{p-1}$ mit $-1 \leq \lambda \leq p-2$ aufgespannte Untermodul W ein irreduzibler $U_0(\mathfrak{sl}_2(K))$-Modul wird. Der Eigenwert von $\tilde{\rho}(h)$ auf dem eindimensionalen Kern von $\tilde{\rho}(e)$ ist $p - \lambda - 2 = dim(W) - 1$. Es gibt daher für $\chi = 0$ genau p Isomorphieklassen von $U_\chi(\mathfrak{sl}_2(K))$-Moduln. Für jedes $1 \leq n \leq p$ existiert bis auf Isomorphie genau ein irreduzibler Modul der Dimension n.

6 Ausblick

In Beispiel 2.11 wurde die Witt-Algebra $W(1)$ definiert. Dazu hatten wir zunächst $V := Ke_{-1} \oplus \ldots \oplus Ke_{p-2}$ gesetzt und dann behauptet, dass durch

$$[e_i, e_j] := \begin{cases} (j-i)e_{i+j} & -1 \leq i+j \leq p-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Lie-Algebra-Struktur definiert wird. Wir geben nun eine Konstruktion, die leicht verallgemeinert werden kann und bei der bekannt ist, dass man eine Lie-p-Algebra erhält. Sie wurde [9, S. 107] und [10, S. 152 f.] entnommen.

Man betrachte den Ring $B_1 := K[X]/(X^p)$. Dann ist die Algebra der Derivationen auf B_1 $Der_K(B_1)$ nach Beispiel 2.3 eine Lie-p-Algebra. Es sei $y \in B_1$. Da X erzeugend für B_1 ist, lässt sich zeigen, dass genau eine Derivation $D \in Der_K(B_1)$ mit $D(X) = y$ existiert. Durch

$$\psi : Der_K(B_1) \to B_1, \quad D \mapsto D(X)$$

ist daher ein K-Vektorraumisomorphismus gegeben. Es seien D, $C \in Der_K(B_1)$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{k=0}^{p-1} y_k X^k =: y, \qquad && y_k \in K \\ C(X) &= \sum_{k=0}^{p-1} z_k X^k =: z, \qquad && z_k \in K. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} [D, C](X) &= D(\sum_{k=0}^{p-1} z_k X^k) - C(\sum_{k=0}^{p-1} y_k X^k) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} y_k \frac{d}{dX} X^k - \sum_{k=0}^{p-1} y_k z \frac{d}{dX} X^k \\ &= y \frac{d}{dX} z - z \frac{d}{dX} y. \end{aligned}$$

Daher ist auf B_1 durch $[f, g] := fg' - gf'$ eine Lie-Klammer gegeben, wobei $(\cdot)'$ die von $\frac{d}{dX}$ induzierte Derivation auf B_1 bezeichne. Jetzt ist ψ ein Lie-Algebren-Isomorphismus.

Es sei $D_i \in Der_K(B_1)$ durch $D_i(X) = X^{i+1}$ für $-1 \leq i \leq p-2$ definiert. Dann ist

$$\begin{aligned}[D_i, D_j](X) &= X^{i+1}(j+1)X^j - (i+1)X^i X^{j+1} \\ &= (j-i)D_{i+j}(X).\end{aligned}$$

Damit haben wir die Witt-Algebra $W(1)$ wiedergefunden.

Die Konstruktion als Algebra von Derivationen wird in [9] verallgemeinert, indem man die Derivationen auf $B_m := K[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^p, \ldots, X_n^p)$ betrachtet. Diese Algebra wird mit $W(n : \mathbf{1})$ bezeichnet, wobei $\mathbf{1} \in \mathbb{N}^n$ an jeder Stelle den Eintrag 1 hat.

In [8, S. 132] werden die Algebren $W(n : \mathbf{m})$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ konstruiert. Sie heißen verallgemeinerte Jacobson-Witt-Algebren. Einfache Lie-p-Algebren, die für geeignetes n und $\mathbf{m}$ in $W(n : \mathbf{m})$ eingebettet werden können, heißen Lie-p-Algebren vom Cartan-Typ. Diese Unteralgebren zu finden wäre der erste Schritt bei einer Klassifikation aller einfachen endlichdimensionalen Lie-p-Algebren.

Als kleiner Ausblick diene der

Satz 6.1 (Block, Wilson)**.** *Jede endlichdimensionale einfache Lie-p-Algebra* $\mathfrak{g}$ *über einem algebraisch abgeschlossenen Körper* K *mit* $char(K) = p > 7$ *ist entweder vom Cartan-Typ oder* $\mathfrak{g}$ *ein Analogon einer einfachen endlichdimensionalen komplexen Lie-Algebra (solche Lie-p-Algebren werden klassisch genannt). Näheres dazu siehe [11].*

7 Literatur

[1] W. Soergel: Lie-Algebren und ihre Darstellungen, Skript, `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXLieA.pdf`

[2] N. Jacobson: Lie Algebras, Interscience tracts in pure and applied mathematics, Vol. 10 (1966)

[3] J.C. Jantzen: Representations of Lie algebras in prime characteristic

[4] J. C. Janzten: Representations of Lie algebras in positive characteristic, Adv. Stud. in Pure Math.: Representation Theory of Algebraic Groups and Qunatum Groups, pp. 1-44

[5] A. Kirillov, jr.: An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Cambridge studies in adv. math. 113, (2008)

[6] J. E. Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, zweite überarbeitete Auflage, Graduate Texts in Mathematics Vol. 9

[7] N. Jacobson: A note on Lie algebras of characteristic p, Amer. J. of Math., Vol. 74, No. 2 (Apr., 1952), pp. 357-359

[8] H. Strade, R. Farnsteiner: Modular Lie algebras and their representations, Pure and applied mathematics, Volume 116 (1988)

[9] N. Jacobson: Classes of restricted Lie algebras in characteristic p, II, Duke Math. J. Volume 10, Number 1 (1943), pp. 107-121.

[10] H.-J. Chang: Über Wittsche Lie-Ringe, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Volume 14 (Dez. 1941), Issue 1, pp 151-184

[11] R.L. Wilson: Simple Lie Algebras over Fields of Prime Characteristic, Proc. of the Int. Congr. of Math. Berkeley, California, USA, (1986), pp. 407-416

[12] C. W. Curtis: Noncummutative extensions of Hilbert rings, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), pp. 945-955

[13] P. Woit: Induced representations and Frobenius reciprocity, `http://www.math.columbia.edu/~woit/LieGroups-2012/inducedreps.pdf`

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Blickle für die Stellung des Themas und intensive Betreuung der Arbeit.

Bei Herrn Prof. Dr. van Straten bedanke ich mich für die Übernahme des Zweitgutachtens.