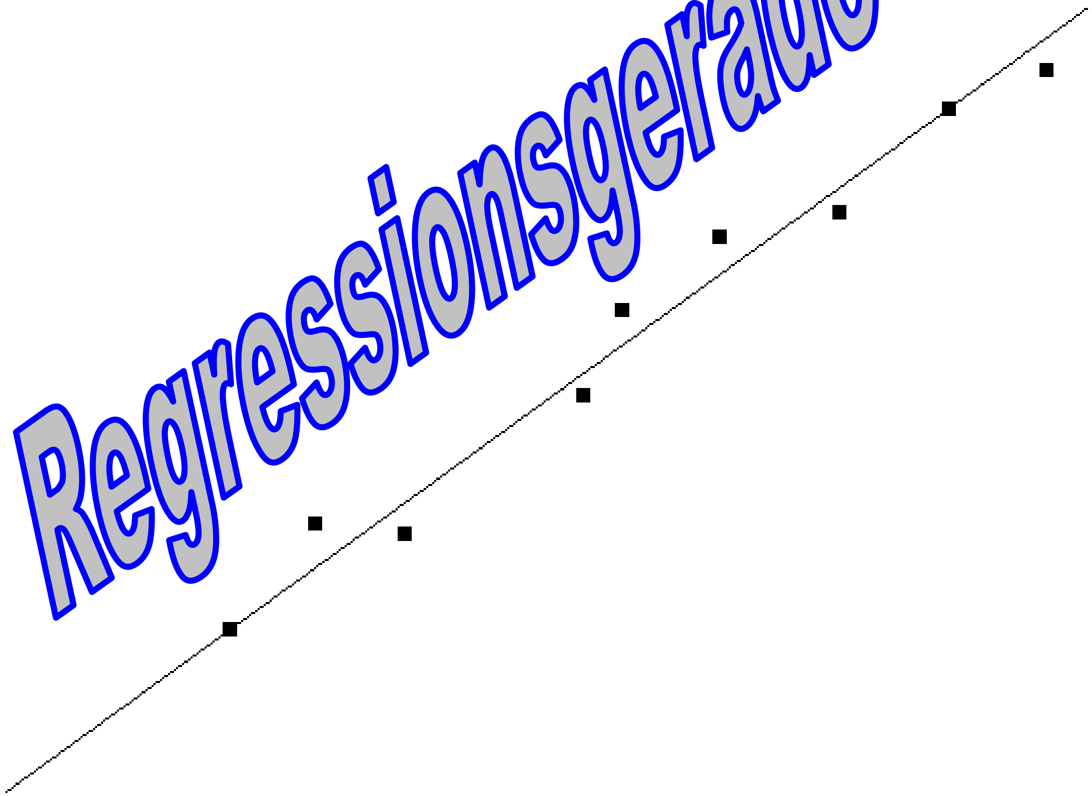
Regressionsgerade



Regressionsgerade: $y = ax + b$:

Bedingung: $$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - ax_i - b\right)^2 = \text{Minimum}$$

Lösung:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{D}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{D}$$

mit $$D = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Beispiel : **Berechnung Regressionsgerade**

Es wurden 7 Messungen (x_i , y_i) vorgenommen.

Wir vermuten einen Zusammenhang in der Form

$$y = ax + b.$$

- Erstellen einer Tabelle (Rechenblatt)
- Übertragen der Messwerte in die Tabelle

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	15	6,5	225	97,5
2	20	5,6	400	112
3	30	5,4	900	162
4	40	6,0	1600	240
5	50	4,6	2500	230
6	60	1,4	3600	84
7	70	0,1	4900	7
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
	285	29,6	14125	932,5

Einsetzen in die Formel für Regressionsgerade:

	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
	285	29,6	14125	932,5

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{7 \cdot 932,5 - 285 \cdot 29,6}{7 \cdot 14125 - 285^2} = \frac{-1908,5}{17650} = -0,10813$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{14125 \cdot 29,6 - 285 \cdot 932,5}{7 \cdot 14125 - 285^2} = \frac{152337,5}{17650} = 8,6310$$

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{7 \cdot 932,5 - 285 \cdot 29,6}{7 \cdot 14125 - 285^2} = \frac{-1908,5}{17650} = -0,10813$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{14125 \cdot 29,6 - 285 \cdot 932,5}{7 \cdot 14125 - 285^2} = \frac{152337,5}{17650} = 8,6310$$

Die Regressionsgerade lautet also:

$$\boxed{y = -0,1081 \cdot x + 8,6310}$$

Exponentielle Regression

Zwischen zwei Größen x und y bestehe der Zusammenhang: $y=c \cdot a^x$.

Dieser Zusammenhang soll durch Messung überprüft - a und c bestimmt werden.

Setze: $Y = \ln (y(x))$

Dann gilt: $Y(x) = \ln (c \cdot a^x) = \ln c + ax$.

Mit $b = \ln c$ ergibt sich dann $\mathbf{Y(x) = ax + b}$ **.**

Bestimmung der Regressionsgerade **$Y(x) = a\,x + b$** „nach dem alten Muster“.

Tragen Sie **$Y = \ln x$** in die „Berechnungsmatrix“ statt y ein; rechnen Sie mit Y weiter.

Bestimmen Sie die Regressionsgerade.

Die Steigung der Regressionsgeraden a ist gleich dem Wachstumsfaktor.

Für den „Anfangswert“ c gilt: $c = e^{b}$.