Lösungen zu Ü2

Aufgabe 1:

Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$; G sei Graph von f;

$Q \in G \Rightarrow d = 5;$

$R \in G \Rightarrow 16 = a + b + c + 5;$

$S \in G \Rightarrow 0 = -a + b - c + 5;$

$P \in G \Rightarrow 7 = -8a + 4b - 2c + 5;$

$$\Rightarrow \quad LGS: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ -8 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{Gauß}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 & 90 \end{bmatrix} \underset{Gauß}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 54 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ a = -1; b = 3; c = 9 ; (d = 5)

Die gesuchte Funktion lautet also $f(x) = -x^3 + 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 5$

Aufgabe 2:

a) $N(t) = 800 \cdot e^{-kt} \Rightarrow 680 = 800 \cdot e^{-1 \cdot t} \Rightarrow k = -\ln \frac{680}{800} = 0{,}1625 \Rightarrow N(t) = 800 \cdot e^{-0{,}1625 \cdot t}$

b) $\tau = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}1625} = 4{,}265 \;\; d.h. \;\; 4 \; Stunden \; 16 \; Minuten$

c) $\tau = \frac{\ln 0{,}6}{-0{,}1625} = 3{,}143 \;\; d.h. \;\; 3 \; Stunden \; 9 \; Minuten$

d) $Nach \; 3 \; Stunden: N(t) = 800 \cdot e^{-0{,}4875} = 491{,}32 \; mg$

$Nach \; neuer \; Injektion: N(t) = 991{,}32 \cdot e^{-0{,}4875} \approx 609 \; mg$

Aufgabe 3: a) Nach der Zeit D ist die Ausgangskeimzahl auf 10% geschrumpft – also auf $0{,}1 \cdot N_0$:

$N(D) = 0{,}1 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\alpha D} \;\; \Rightarrow \;\; 0{,}1 = e^{-\alpha D} \;\; \Rightarrow \;\; \ln 0{,}1 = -\alpha \cdot D \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = \frac{\ln 0{,}1}{-0{,}2} \;\; \Rightarrow$

<u>α = 11,51 Min.</u>

b) $N(t) = N_0 \cdot e^{-\alpha t} = N_0 \cdot 10^{-\beta t} \;\; \Rightarrow \;\; e^{-\alpha t} = 10^{-\beta t} = (e^{\ln 10})^{(-\beta t)} = e^{-\beta t . \ln 10} \overset{!}{=} e^{-\alpha t} \;\; \Rightarrow$

$\alpha = \beta \cdot \ln 10 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\beta = \frac{\alpha}{\ln 10} = \frac{1}{D}}$ ($\alpha = \ln(0{,}1) / (-D) = \ln(10) / D$)

c) $N_{t_{0,5}} = N_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t_{0,5}} = 0{,}5 \cdot N_0 \;\; \Rightarrow \;\; \ln 0{,}5 = -\alpha \cdot t_{0,5} \;\; \Rightarrow$

$t_{0,5} = \frac{\ln 0{,}5}{-\alpha} = \frac{\ln 2}{\alpha} \approx \frac{\ln 2}{11{,}5} \approx 0{,}0603 \quad Min.$ (ca. 3,6 Sekunden)

Aufgabe 4: Bildet man den Quotienten aufeinander folgender Konzentrationen; so erhält man nacheinander:

$\frac{7,20}{10} = 0,72$; $\frac{5,18}{7,20} = 0,719$; $\frac{3,72}{5,18} = 0,7181$; $\frac{2,68}{3,72} = 0,7204$; $\frac{1,93}{2,68} = 0,7201$

Daher kann man in guter Näherung von einem exponentiellen Zerfall ausgehen. Mit dem „Mittelwert" 0,72 erhält man dann k = ln (a) $\approx$ -0,3285.

Mit der Anfangskonzentration 10 erhält man die Zerfallsfunktion W:

$$W(t) = 10 \cdot e^{-0,3285 \cdot t}$$

Aus $0,5 = 10 \cdot e^{-0,3285 \cdot t}$ erhält man $e^{-0,3285 \cdot t} = 0,05$ - und hieraus $t = \frac{\ln 0,05}{-0,3285} \approx 9,12$.

Am zehnten Tag ist die Konzentration unter 0,5 mg/l gesunken.

Aufgabe 5:

a) $f'(x) = \frac{n \cdot (\ln(x))^{n-1}}{x}$

b) $f'(x) = \frac{n}{x}$

c) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{e^{ax}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$

e) $f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 3x) \cdot (2x + 3) = 4x^3 + 18x^2 + 18x$

f) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x (2 + x)$