Name:

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 16. Juni 2017

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) SoSe 2017

Übung 9

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$ aus Übung 7, Aufgabe 2 (d).

(a) [3] Bestimmen Sie die Extremwertstellen, an denen die Funktion ein Minimum hat.

(b) [5] Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion um die Stelle $x_0 = 1$.

2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

die in der Physik häufig mit dem Namen r anstelle von f bezeichnet wird.

(a) [3] Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$.

(b) [1] Geben Sie (ohne neue Rechnung) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ an (Begründung!).

(c) [2] Wir betrachten eine weitere Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und definieren das Kompositum $h = g \circ r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h(x, y, z) = g(r(x, y, z))$. Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial h}{\partial x}$. Die beiden anderen partiellen Ableitungen ergeben sich analog.

3. [8] Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x \sin(y) - y \sin(x)$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y), n \geq 1, \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y), n \geq 1, \quad \frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m \partial x^n} f(x, y), m, n \geq 1.$$

Bemerkung: Da die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist, spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen keine Rolle.

4. [3] Benutzen Sie

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z,$$

um näherungsweise zu berechnen, wie sich der Wert der Funktion $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ beim Übergang von der Stelle $(2, 1, 1)$ zur Stelle $(2,003, 1,001, 1,005)$ ändert.

5. Die potenzielle Energie eines Teilchens, das sich am Ort (x, y, z) befindet, sei durch

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

gegeben.

- (a) [2] Nun bewege sich das Teilchen: Zur Zeit t sei es am Ort $(x(t), y(t), z(t))$. Drücken Sie die zeitliche Änderungsrate der potenziellen Energie dieses Teilchens durch den Ort $\vec{r}$ und die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ zur Zeit t aus.
- (b) [1] Wie muss sich das Teilchen bewegen, damit $\frac{dV}{dt} = 0$ ist.
6. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = e^x \cos(xy)$.
- (a) [6] Berechnen Sie *explizit* die Taylor-Entwicklung um die Stelle $(x^0, y^0) = (0, 0)$ bis einschließlich Terme der Ordnung x^2 , xy und y^2 .
- (b) [3] Berechnen Sie nun die Taylor-Entwicklung bis einschließlich x^4 , x^3y , x^2y^2 , xy^3 , y^4 , indem Sie von der Entwicklung der Exponentialfunktion und der Kosinusfunktion Gebrauch machen.
7. [3] Es sei $f(t, x, y) = t(x^2 + y^2)$. Bestimmen Sie für $x(t) = a \cos(\omega t)$ und $y(t) = b \sin(\omega t)$ die totale zeitliche Änderung $\frac{df}{dt}$.