

Name:

1	2	3	4	5	6	Σ

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 9. Juni 2017

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) SoSe 2017
Übung 8

1. [2] Gegeben seien die Hyperbelfunktionen

$$\cosh(x) := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad \sinh(x) := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

Zeigen Sie

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Tipp: $e^a e^b = e^{a+b}$, $e^0 = 1$.

2. [6] Bestimmen Sie mithilfe der Quotientenregel die folgenden Ableitungen und geben Sie jeweils deren Definitionsbereiche an:

$$(\cot(x))' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)',$$

$$(\tanh(x))' = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)',$$

$$(\coth(x))' = \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \right)'.$$

Hinweis:

$$(\sinh(x))' = \cosh(x),$$

$$(\cosh(x))' = \sinh(x).$$

3. [5] Leiten Sie mithilfe der Kettenregel die Ableitungen folgender Funktionen her:

$$f(x) = \sin(x^2),$$

$$f(x) = \sin^2(x),$$

$$f(x) = e^{-x},$$

$$f(x) = \exp(-x^2),$$

$$f(x) = \frac{1}{ax + b}.$$

4. Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in der (x,y) -Ebene gleichförmig auf einer Ellipsenbahn mit Halbachsen a und b :

$$\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega > 0.$$

- (a) [1] Zeichnen Sie eine Skizze der Ellipse.
- (b) [2] Bestimmen Sie $\dot{\vec{r}}(t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t)$.
- (c) [1] Wie muss die Kraft als Funktion von \vec{r} aussehen, damit die Ellipsenbahn Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung, $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$, ist.
- (d) [4] Bestimmen sie den Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$.
- (e) [1] Bestimmen Sie die zeitliche Änderung des Drehimpulses.

5. Gegeben sei die Funktion $f :] - 1, \infty[, x \mapsto f(x) = \ln(1 + x)$.

- (a) [1] Skizzieren Sie die Funktion.
- (b) [7] Bestimmen Sie das zugehörige Taylor-Polynom der Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ bis einschließlich der Ordnung x^4 .
- (c) [1] Geben Sie aufgrund der ersten Glieder eine geschlossene Formel für die gesamte Taylor-Reihe an.
- (d) [2] Bestimmen Sie das Ergebnis für $x = 0,2$ mithilfe eines Taschenrechners. Vergleichen Sie dann mit den Ergebnissen der Taylor-Polynome p_0, p_1, p_2, p_3 und p_4 für $x = 0,2$.

Bemerkung: Die Taylor-Entwicklung von $\ln(1 + x)$ um die Stelle 0 konvergiert für $-1 < x \leq 1$.

6. Wir betrachten die relativistische Energie-Impuls-Beziehung eines Teilchens mit Ruhemasse m und Betrag $p := |\vec{p}|$ des Impulsvektors \vec{p} :

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Für die Betrachtung des nichtrelativistischen Grenzfalles, $p \ll mc$, ist es zweckmäßig einen Faktor mc^2 aus der Wurzel herauszuziehen:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}}.$$

- (a) [6] Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \sqrt{1 + x}$ mit Mittelpunkt 0 bis einschließlich der Potenz x^2 :

$$\sqrt{1 + x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Hinweis:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) x^{m-n}.$$

(Bei ganzzahligem m und $n > m$ ist die n -te Ableitung gleich 0.)

- (b) [1] Verwenden Sie das Resultat aus (a), indem Sie $x = \frac{p^2}{(mc)^2}$ setzen, und verifizieren Sie

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{p^6}{(mc)^6}\right).$$

Interpretation: Der erste Term stellt die Ruheenergie des Teilchens dar, der zweite Term die nichtrelativistische kinetische Energie und der dritte Term die erste relativistische Korrektur.