

Name:

1	2	3	4	5	Σ

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

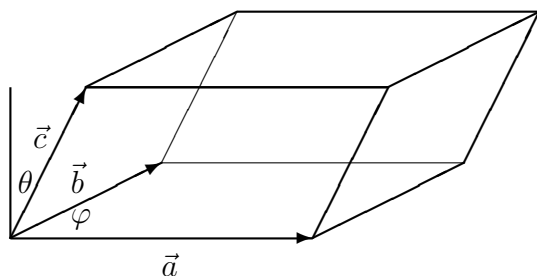
S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 12. Mai 2017

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) SoSe 2017

Übung 4

1. [3] Gegeben sei ein durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannter Spat (Parallelepiped):



Begründen Sie, weshalb das Volumen durch

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

gegeben ist.

Hinweis: Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ und der Grundfläche her. Überlegen Sie anschließend, was die Höhe des Spats ist. Wieso taucht das Betragszeichen auf?

2. Polarkoordinaten

- (a) [4] Skizzieren Sie ein kartesisches (x, y) -Koordinatensystem. Tragen Sie die Punkte $P_1 = (1, 1)$ und $P_2 = (0, -1)$ ein. Tragen Sie die zugehörigen Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ein. Wie lauten die Polarkoordinaten (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2) der Punkte?
- (b) [6] Im Folgenden werden 9 Möglichkeiten für die kartesischen Koordinaten (x, y) eines Punktes P diskutiert. Ordnen Sie diesen Möglichkeiten jeweils den richtigen Wertebereich des Winkels φ zu, wobei wir als Konvention $0 \leq \varphi < 2\pi$ vereinbaren.
- | | |
|--------------------|---------------------------------------|
| (1) $x > 0, y = 0$ | i. $\varphi = \pi$ |
| (2) $x < 0, y > 0$ | ii. $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$ |
| (3) $x = 0, y < 0$ | iii. $\varphi = 0$ |
| (4) $x > 0, y > 0$ | iv. $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ |
| (5) $x = 0, y = 0$ | v. $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ |
| (6) $x = 0, y > 0$ | vi. $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ |
| (7) $x > 0, y < 0$ | vii. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ |
| (8) $x < 0, y = 0$ | viii. $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ |
| (9) $x < 0, y < 0$ | ix. $\varphi = 0$ |

3. Gegeben seien die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten,

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho &= \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y, \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\hat{e}_x + \cos(\varphi)\hat{e}_y, \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z.\end{aligned}$$

- (a) [5] Berechnen Sie explizit die Skalarprodukte $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z$, $\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z$ und $\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z$.

Hinweise: Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass die kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ und $\hat{e}_z$ jeweils die Länge 1 besitzen und paarweise auf einander senkrecht stehen.

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1.$$

- (b) [6] Berechnen Sie nun die Kreuzprodukte $\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z$ und $\hat{e}_z \times \hat{e}_\rho$.

Hinweis: $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ bildet ein rechtshändiges System.

Fazit: Sie haben sich davon überzeugt, dass $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z\}$ ein rechtshändiges, normiertes, orthogonales Dreibein bildet.

4. Gegeben seien die (2×2) -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Spaltenvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) [5] Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ (häufig werden die Punkte auch weggelassen, und man schreibt AB und BA). Welchen Schluss ziehen Sie bezüglich der Vertauschbarkeit der Reihenfolge in der Matrizenmultiplikation?
- (b) [3] Berechnen Sie $\vec{y} := A\vec{x}$ und anschließend $B\vec{y}$. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis von $(BA)\vec{x}$.

5. Gegeben seien die (2×2) -Matrix

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

und die Einheitsvektoren $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) [4] Berechnen $D(\varphi)\hat{e}_1$ und $D(\varphi)\hat{e}_2$. Was macht $D(\varphi)$ mit den Einheitsvektoren $\hat{e}_1$ und $\hat{e}_2$? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- (b) [4] Betrachten Sie nun die Matrix

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Berechnen Sie $C(\varphi)D(\varphi)$ und $D(\varphi)C(\varphi)$.

Fazit: $C(\varphi)$ ist die zu $D(\varphi)$ inverse Matrix und wird deshalb auch als $D^{-1}(\varphi)$ geschrieben.