

Name:

1	2	3	Σ

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 5. Mai 2017

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) SoSe 2017

Übung 3

1. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

- [1] Berechnen Sie die Linearkombination $\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$.
- [3] Testen Sie die Vektoren paarweise auf lineare Unabhängigkeit.
- [9] Berechnen Sie für alle Vektoren den Betrag, sowie für alle Paare das Skalarprodukt und den eingeschlossenen Winkel.
- [3] Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{b}$ und $\vec{c} \times \vec{a}$.
- [4] Berechnen Sie explizit das doppelte Kreuzprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ und vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis der Graßmann-Identität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

- [1] Drücken Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ durch die Komponenten a_i und b_j sowie das Delta-Symbol aus.
 - [1] Drücken Sie die i -te Komponente des Kreuzprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ durch a_j , b_k und das Epsilon-Symbol aus.
3. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen der Reihe nach. Sie dürfen die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben verwenden.
- [5] Bei der Berechnung des doppelten Kreuzproduktes $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ wird folgende Summe benötigt:

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \underbrace{\epsilon_{klm}}_{=\epsilon_{lmk}} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}.$$

Begründung:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{klm} b_l c_m \\ &= \sum_{j,l,m=1}^3 a_j b_l c_m \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun, dass die letzte Summe sich folgendermaßen mithilfe der Delta-Symbole ausdrücken lässt:

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Tipp: Überlegen Sie zunächst, welche Werte die Summe überhaupt annehmen kann. Formulieren Sie dann für die Indizes i, j, l und m Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit der Ausdruck nicht verschwindet. Verwenden Sie dazu Delta-Symbole. Untersuchen Sie schließlich, welches Vorzeichen das entsprechende Produkt aus Epsilon-Symbolen besitzt und begründen Sie damit die Vorzeichen der Produkte aus Delta-Symbolen.

Bemerkung: Sie können auch für die $3^4 = 81$ Wertekombinationen der Indizes i, j, l und m jeweils das Gleichheitszeichen überprüfen. Das wollen Sie natürlich nicht!

(b) [3] Zeigen Sie

$$\sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}.$$

Hinweis: Unter Umständen müssen Sie die Indizes des Epsilon-Symbols in eine geeignete Reihenfolge bringen. Zur Erinnerung $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$.

(c) [1] Zeigen Sie

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6.$$

(d) [3] Verifizieren Sie die Graßmann-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

auch bekannt als „b(ac)–c(ab)“-Regel.

Tipp: Betrachten Sie die i -te Komponente $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i$ und verwenden Sie das Resultat aus (a).

(e) [2] Verifizieren Sie die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Tipp: Verwenden Sie für die einzelnen Terme die Graßmann-Identität.

(f) [4] Zeigen Sie die Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Tipp: Starten Sie mit $\sum_{i=1}^3 (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{c} \times \vec{d})_i$ und verwenden Sie am Ende das Resultat aus (a).