

Name:

1	2	3	4	Σ

Übungsgruppe:

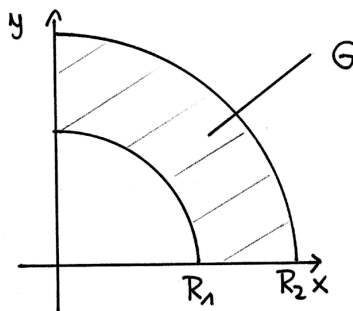
Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 7. Juli 2017

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) SoSe 2017
Übung 12

1. Es sei G der in der Skizze dargestellte Viertelkreisring einschließlich der Ränder:



(a) [2] Drücken Sie G in Polarkoordinaten aus.

(b) [5] Berechnen Sie

$$\int_G d^2x \, xy.$$

2. [4] Berechnen Sie

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} d^2x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie geeignete Koordinaten.

3. [4] Berechnen Sie das Volumen eines Zylinders mit Radius R und Höhe h durch eine Integration vom Typ

$$\int_{\text{Zylinder}} d^3x$$

mithilfe der Zylinderkoordinaten.

4. Gegeben sei ein Zylinder mit

$$G = \{(\rho, \varphi, z) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}.$$

Der Zylinder besitze eine homogene Massenverteilung

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } \vec{x} \in G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachten Sie, dass der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems sich im Schwerpunkt des Zylinders befindet und nicht etwa im Mittelpunkt des unteren Zylinderdeckels.

- (a) [2] Drücken Sie ρ_0 durch R , h und die Gesamtmasse M aus.
Tipp: Siehe Aufgabe 3.
- (b) [6] Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{33} ,

$$I_{33} = \int_G d^3x \rho(\vec{x})(x^2 + y^2).$$

- (c) [8] Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{11} ,

$$I_{11} = \int_G d^3x \rho(\vec{x})(y^2 + z^2).$$

Hinweis: $\int dx \cos^2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

- (d) [5] Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{13} ,

$$I_{13} = \int_G d^3x \rho(\vec{x})xz.$$

- (e) [4] Der Zylinder rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um eine Achse durch den Schwerpunkt. Drücken Sie die kinetische Energie der Rotation durch Ω_1 , Ω_2 und Ω_3 sowie die Gesamtmasse M , den Radius R und die Höhe h des Zylinders aus.

Hinweis: Wegen der Zylindersymmetrie ist $I_{22} = I_{11}$. Außerdem verschwinden I_{12} , I_{23} .