

Name:

1	2	3	4	Σ

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 30. Juni 2017

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) SoSe 2017

Übung 11

1. [6] Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{-1}^3 \left(\int_2^4 (x^2 - y^2) dy \right) dx = \int_{-1}^3 dx \int_2^4 dy (x^2 - y^2).$$

Beim zweiten Ausdruck handelt es sich um die Physiker-Schreibweise.

2. [8] Es sei G das Rechteck mit den Eckpunkten $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(2, 4)$ und $(3, 4)$. Skizzieren Sie das Integrationsgebiet und berechnen Sie

$$\int_G d^2x (x + y)^2.$$

3. Es sei $I := [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^{(2)}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \in]0, 1] \times]0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) [2] Betrachten Sie $x = 0$ und bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(0, y) dy$.

Hinweis: Schauen Sie sich die Definition der Funktion sorgfältig an.

- (b) [2] Bestimmen Sie für $0 < x \leq 1$ das Integral $\int_0^1 f(x, y) dy$.

Tipp:

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

- (c) [2] Bestimmen Sie nun

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Tipp:

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(x).$$

- (d) [1] Betrachten Sie nun $y = 0$ und bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x, 0) dx$.

- (e) [1] Bestimmen Sie für $0 < y \leq 1$ das Integral $\int_0^1 f(x, y) dx$.

Tipp:

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(f) [1] Bestimmen Sie nun

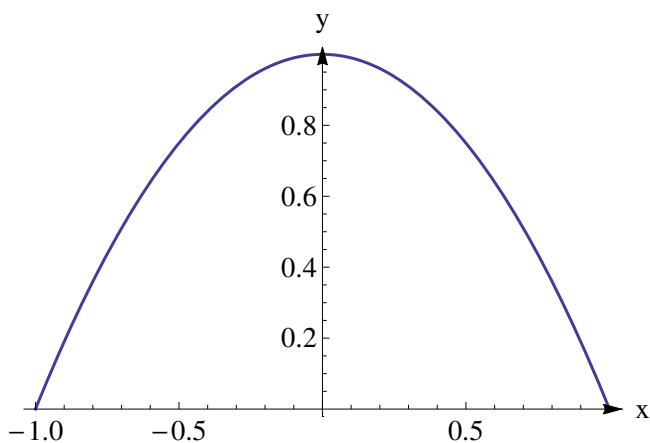
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Fazit: Die unterschiedliche Integrationsreihenfolge liefert unterschiedliche Ergebnisse. Die Funktion ist somit nicht Riemann-integrierbar.

4. [7] Berechnen Sie

$$\int_G d^2x \, y = \int_G y \, dx \, dy,$$

wobei G , wie in der Skizze gezeigt, das Flächenstück zwischen der Parabel $y = 1 - x^2$ und der x -Achse ist.



Tipp: Wählen Sie als begrenzende Kurven $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = 1 - x^2$.

5. Kompensation für den erhöhten Zeitaufwand der letzten Übungen **+10**.