

Name:

1	2	3	4	Σ

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 23. Juni 2017

Mathematische Rechenmethoden 1 (B.Ed.) SoSe 2017
Übung 10

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.

(a) [1] Bestimmen Sie mithilfe von Wolfram|Alpha das bestimmte Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(b) [3] Berechnen Sie die Taylor-Reihe von e^{-x^2} bis einschließlich Terme der Ordnung x^{10} . Wir bezeichnen die einzelnen Taylor-Polynome mit p_0, p_2, p_4, p_6, p_8 und p_{10} .

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Reihe für e^x und ersetzen Sie x durch $-x^2$.

(c) [4] Bestimmen Sie nun das Integral approximativ, indem Sie die einzelnen Taylor-Polynome von 0 bis 1 integrieren. Ihre sechs Ergebnisse sollten sich Schritt für Schritt an das Resultat aus (a) annähern.

2. [4] Es seien $g(x)$ und $u(x)$ auf dem Intervall $[-a, a]$, $a > 0$, integrierbare Funktionen mit $g(x) = g(-x)$ und $u(x) = -u(-x)$. Zeigen Sie

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx,$$
$$\int_{-a}^a u(x) dx = 0.$$

Bemerkung: Insbesondere das zweite Ergebnis ist von großem Interesse, weil man sich damit unter Umständen sehr viel Rechenarbeit ersparen kann.

3. Partialbruchzerlegung. Gesucht ist das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx.$$

(a) [3] Schreiben Sie $\frac{1}{1-x^2}$ als Produkt $\frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2}$ von Brüchen $\frac{1}{N_1}$ und $\frac{1}{N_2}$. Machen Sie den Ansatz

$$\frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} = \frac{A}{N_1} + \frac{B}{N_2},$$

und bestimmen Sie A und B .

(b) [4] Berechnen Sie die beiden Integrale jeweils mithilfe einer Substitution.

- (c) [2] Führen Sie die beiden Resultate in einem Ausdruck zusammen.

Als Endergebnis sollten Sie

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{|1+x|}{|1-x|} \right)$$

erhalten, wobei die Integrationskonstante C unterdrückt wurde.

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten und bestimmten Integrale. Wenden Sie die Substitutionsregel, partielle Integration oder gegebenenfalls andere Integrationsregeln an.

- (a) [2]

$$\int \frac{1}{ax+b} dx$$

- (b) [2]

$$\int_0^t e^{-\frac{2x}{a}} dx$$

- (c) [5]

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Hinweis: Wenden Sie eine Substitution $x = \sin(y)$ an. Machen Sie anschließend von partieller Integration Gebrauch. Nutzen Sie nun $\sin^2(y) = 1 - \cos^2(y)$.

- (d) [1]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

- (e) [2]

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

- (f) [2]

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0$$

- (g) [1]

$$\int \dot{x}(t) dt$$

- (h) [2]

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

- (i) [2] Benutzen Sie

$$\ln(b) = \int_1^b \frac{1}{x} dx,$$

um die Gültigkeit der Rechenregel

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad a, b > 0,$$

zu zeigen.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $x = \frac{y}{a}$.