9. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

05.01.2015

Aufgabe 1 (80 Punkte): Ein Dirac-Teilchen in einem sphärischen Potentialtopf

Betrachte die Dirac Gleichung

$$\left(\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}} + \hat{\beta}\, m_0 c^2\right) \psi(\vec{r}) = \left[E - V(r)\right] \psi(\vec{r}), \tag{1}$$

in einem sphärischen Kastenpotential:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 < 0 & r \leq R \\ 0 & r > R. \end{cases} \tag{2}$$

(a) (20 Punkte) Zeige, dass

$$\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}} = -i\hat{\alpha}_r \left(\hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\hat{\beta}}{r}\hat{K}\right), \tag{3}$$

mit $\hat{K} = \hat{\beta}\left(\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{L}} + \hbar\right)$.

Hinweis: Verwende $\vec{\nabla} = \hat{e}_r \cdot \left(\hat{e}_r \cdot \vec{\nabla}\right) - \hat{e}_r \times \left(\hat{e}_r \times \vec{\nabla}\right)$.

(b) (20 Punkte) Verwende den Separationsansatz

$$\psi(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} g(r)\,\chi_{\kappa,\mu}(\theta,\phi) \\ if(r)\,\chi_{-\kappa,\mu}(\theta,\phi) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

mit den Eigenfunktionen des Winkelanteils

$$\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{L}} + \hbar\right) \chi_{\kappa,\mu} = -\hbar\kappa\chi_{\kappa,\mu}, \tag{5a}$$

$$\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{L}} + \hbar\right) \chi_{-\kappa,\mu} = \hbar\kappa\chi_{-\kappa,\mu}, \tag{5b}$$

und finde die Differentialgleichungen für $u_1(r) = rg(r)$ und $u_2(r) = rf(r)$.

(c) (20 Punkte) Für $(\hbar kc)^2 \equiv (E + V_0)^2 - m_0^2c^4 > 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch:

$$u_1(r) = r\left[a_1 j_{l_\kappa}(kr) + a_2 y_{l_\kappa}(kr)\right], \tag{6a}$$

$$u_2(r) = \frac{\kappa}{|\kappa|}\frac{\hbar ckr}{E + V_0 + m_0c^2}\left[a_1 j_{l_{-\kappa}}(kr) + a_2 y_{l_{-\kappa}}(kr)\right], \tag{6b}$$

wobei j_l und y_l die sphärischen Besselfunktionen erster und zweiter Art sind. Für $(\hbar Kc)^2 \equiv m_0^2c^4 - (E+V_0)^2 > 0$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch:

$$u_1(r) = r\sqrt{\frac{2Kr}{\pi}}\left[b_1 K_{l_\kappa+1/2}(Kr) + b_2 I_{l_\kappa+1/2}(Kr)\right], \tag{7a}$$

$$u_2(r) = \frac{\hbar cKr}{E + V_0 + m_0c^2}\sqrt{\frac{2Kr}{\pi}}\left[-b_1 K_{l_{-\kappa}+1/2}(Kr) + b_2 I_{l_{-\kappa}+1/2}(Kr)\right], \tag{7b}$$

wobei $K_{l+1/2}$ und $I_{l+1/2}$ die modifizierten Besselfunktionen sind. Es gilt außerdem

$$l_\kappa = \begin{cases} \kappa & \text{für} \quad \kappa > 0 \\ -\kappa - 1 & \text{für} \quad \kappa < 0, \end{cases} \tag{8}$$

und

$$l_{-\kappa} = \begin{cases} -\kappa & \text{für} \quad -\kappa > 0 \\ \kappa - 1 & \text{für} \quad -\kappa < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Bestimme die gebundenen Zustände, für welche gilt: $E > -V_0 + m_0c^2$, $-m_0c^2 < E < m_0c^2$.

(d) (20 Punkte) Unter Verwendung der Stetigkeitsbedingung bei $r = R$ soll folgende Beziehung für s-Zustände ($\kappa = -1$) hergeleitet werden:

$$\frac{kR\sin(kR)}{\sin(kR) - kR\cos(kR)} = \frac{k}{K}\frac{e^{-KR}}{e^{-KR}\left(1+\frac{1}{KR}\right)}\frac{E+m_0c^2}{E+V_0+m_0c^2}. \tag{10}$$

Welche Form haben k und K?
Bringe anschließend Gleichung (10) auf die Form:

$$\begin{aligned}&\tan\left(\frac{R}{\hbar c}\sqrt{(E+V_0)^2 - m_0^2c^4}\right)\sqrt{\frac{E+V_0+m_0c^2}{E+V_0-m_0c^2}}\\ &\left\{\frac{\hbar c}{R}\left[\frac{1}{E+m_0c^2} - \frac{1}{E+V_0+m_0c^2}\right] - \sqrt{\frac{m_0c^2-E}{m_0c^2+E}}\right\} = 1.\end{aligned} \tag{11}$$

Diese Gleichung verknüpft die Energieeigenwerte der s-Zustände mit den Eigenschaften des sphärischen Kastenpotentials.
Hinweis: Falls notwendig, dürfen die folgenden Rayleigh Formeln für (sphärische) Besselfunktionen verwendet werden:

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin(x)}{x}\right), \tag{12a}$$

$$y_n(x) = -(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos(x)}{x}\right), \tag{12b}$$

$$i_n(x) = x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sinh(x)}{x}\right), \tag{12c}$$

$$k_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{-x}}{x}\right), \tag{12d}$$

wobei

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x), \tag{13a}$$

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+1/2}(x). \tag{13b}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte): myonischer Wasserstoff

Das Myon ist ein Teilchen dessen fundamentalen Eigenschaften, mit Ausnahme der Masse, denen des Elektrons entsprechen. Die Myonmasse ist

$$m_\mu = 207\, m_e,$$

wobei die Masse des Elektrons $m_e = 0.511\, MeV$ beträgt.

Die negativ geladenen Myonen können myonischen Wasserstoff bilden, welches ein wasserstoffartiges Atom ist, wobei ein Elektron durch ein Myon ersetzt wurde. Myonischer Wasserstoff kann als zwei punktförmige Teilchen betrachten werden - ein Proton (mit Masse $m_p = 938.6\, MeV$) und ein Myon, mit einer Coulombwechselwirkung zwischen beiden.

(a)(15 Punkte) Gib die Schrödingergleichung dieses Systems an und separiere sie in zwei Anteile, wobei einer die Bewegung des Massenschwerpunkts beschreibt und der zweite die relative Bewegung des Protons und Myons.

(b)(5 Punkte) Berechne den Bohrradius und die Ionisationsenergie des myonischen Wasserstoffs. Die entsprechenden Werte für gewöhnlichen Wasserstoff sind $a_0(H) = 5.29 \times 10^{-11}\, m$ und $E_1(H) = 13.6\, eV$.