

8. Übungsblatt  
Theoretische Physik 6: WS2014/15  
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

15.12.2014

**Aufgabe 1 (50 Punkte): Orthogonalität und Vollständigkeit der Dirac-Spinoren**

Zeige, dass

- (a) **(15 Punkte)** die Spinoren  $w$  die Orthogonalitätsbedingung

$$\bar{w}_r(\vec{p})\bar{w}_{r'}(\vec{p}) = w_r^\dagger(\vec{p})\gamma^0 w_{r'}(\vec{p}) = \delta_{rr'}\lambda_r,$$

- (b) **(15 Punkte)** sowie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{r=1}^4 \lambda_r(w_r(\vec{p}))_\alpha (\bar{w}_r(\vec{p}))_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1\dots 4,$$

erfüllen.

Im Folgenden sei die Normierung der Spinoren so gewählt, dass  $\bar{u}(p, s_z)u(p, s'_z) = \delta_{s_z s'_z}$  und  $\bar{v}(p, s_z)v(p, s'_z) = -\delta_{s_z s'_z}$ . Verwenden Sie die explizite Form für  $u$ ,  $\bar{u}$ ,  $v$  und  $\bar{v}$  und zeigen Sie, dass

- (c) **(10 Punkte)**

$$\begin{aligned} u^\dagger(p, s_z)u(p, s'_z) &= \frac{E_p}{m_0 c^2} \delta_{s_z s'_z}, \\ v^\dagger(p, s_z)v(p, s'_z) &= \frac{E_p}{m_0 c^2} \delta_{s_z s'_z}, \end{aligned}$$

(d) (10 Punkte)

$$\begin{aligned}\sum_{s_z} u(p, s_z) \bar{u}(p, s_z) &= \frac{\not{p} + m_0 c}{2m_0 c}, \\ \sum_{s_z} v(p, s_z) \bar{v}(p, s_z) &= \frac{\not{p} - m_0 c}{2m_0 c}.\end{aligned}$$

## Aufgabe 2 (30 Punkte): Projektionsoperatoren

Zeigen Sie, dass  $P_{\pm} = \Lambda_{\pm} = \pm \frac{\not{p} \pm m_0 c}{2m_0 c}$  und  $P_{\Sigma_+, \Sigma_-} = \Sigma_{\pm}(s) = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{s}}{2}$  zwei vollständige Sätze von Projektionsoperatoren sind, d.h. sie erfüllen die Eigenschaften

$$P_i P_j = \delta_{i,j} P_i, \quad \sum_i P_i = 1.$$

Zeigen Sie, dass die  $\Lambda_{\pm}$  auf Lösungen mit positiver bzw. negativer Energie und die  $\Sigma_{+,-}$  auf Lösungen mit positiver bzw. negativer Chiralität projizieren.

## Aufgabe 3 (20 Punkte): Lorentz transformation identity

Überprüfen Sie, dass für eine Lorentz Transformation  $S$ :

$$S^{-1} = \gamma_0 S^+ \gamma_0.$$

## Aufgabe 4 (20 Bonuspunkte): Gordon-Identität

Leiten Sie die Gordon-Identität

$$\bar{u}(p') \gamma^{\mu} u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{P^{\mu}}{2M} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_{\nu}}{2M} \right] u(p)$$

her, wobei  $P = p' + p$ ,  $q = p' - p$  und  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$ .