6. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

01.12.2014

Aufgabe 1 (25 Punkte): Elektronen in einem konstanten Magnetfeld

Um das Verhalten von Elektronen in einem konstanten Magnetfeld zu untersuchen, muss die stationäre Dirac-Gleichung

$$\left(-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{D}+\beta m_0 c^2\right)\psi \;=\; E\psi$$

gelöst werden, wobei die mininmale Kopplung $\vec{\nabla}\to\vec{D}\equiv\vec{\nabla}-ie\vec{A}/\hbar c$ verwendet wird.

(a) (10 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{D}\right)^2 \;=\; \vec{D}^2\mathbb{1}+e\vec{\Sigma}\cdot\vec{B}/\hbar c.$$

(b) (15 Punkte) Wir betrachen nun den Fall $\vec{A}=(0,xB,0)$. Nehmen Sie an, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung die Form $\psi=e^{i(p_y y+p_z z)/\hbar}u(x)$ haben und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte E eines relativistischen Elektrons im konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ durch

$$E^2 \;=\; m_0^2c^4+p_z^2c^2+(2n+1)|eB|\hbar c\pm eB\hbar c, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

gegeben sind.
Hinweis: Die Eigenwerte des harmonischen Oszillators $-\partial_x^2+\omega^2x^2$ sind $(2n+1)|\omega|$ mit $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (60 Punkte): Dirac-Teilchen im skalaren Potential

Betrachten Sie ein Dirac-Teilchen, dass sich entlag der z-Achse im skalaren Potential

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } z < -a/2 & \text{(Region I)} \\ V_0 & \text{wenn } -a/2 \leq z \leq a/2 & \text{(Region II)} \\ 0 & \text{wenn } a/2 < z & \text{(Region III)} \end{cases},$$

mit $a > 0$ und $V_0 < 0$, bewegt. In den Regionen I und III hat die zeitunabhängige Dirac-Gleichung die Form

$$\left(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} c + \beta m_0 c^2\right) \psi \;=\; E\psi\,,$$

in Region II hat sie die Form

$$\left[\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} c + \beta(m_0 c^2 + V_0)\right] \psi \;=\; E\psi\,.$$

In der zweiten Region kann man das Teilchen aufgrund des Potentials als ein Teilchen mit effektiver Masse $m_{eff} = m_0 + V_0/c^2$ betrachten.

(a) (10 Punkte) Schreiben Sie die allgemeine Lösung $\psi(z)$ für alle drei Regionen mit einem Spin in z-Richtung auf.
Hinweise: Eine Lösung durch ebene Wellen mit Impuls $\vec{p}$, Masse m und Spin s kann geschrieben werden als

$$u(\vec{p}, s) \;=\; A \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\chi_s \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)},$$

wobei A eine komplexe Zahl und χ_s ein zwei-komponentige Spinor ist. Für eine Spinprojektion entlang der z-Achse ist χ_s ein Eigenzustand der Pauli-Matrix σ_3. Bedenken Sie, dass sich ebene Wellen in beide Richtungen bewegen. Die Matritzen $\vec{\alpha}$ und β sind in Standarddarstellung gegeben durch

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

(b) (20 Punkte) Fordern Sie Stetigkeit bei $z = \pm a/2$. Drücken Sie den Koeffizient der einlaufenden Welle in Region I in Abhängigkeit der ebenen Wellen in Region III aus. Definieren Sie die dimensionslose Größe

$$\gamma \equiv \frac{k_1 c}{E + m_0 c^2} \frac{E + m_{eff} c^2}{k_2 c},$$

wobei k_1 der Impuls in den Regionen I and III und k_2 der Impuls in Region II ist.

(c) (30 Punkte) Betrachten Sie den Spezialfall $|m_{eff}c^2| < |E| < m_0c^2$, der zu gebundenen Zuständen führt. Zeigen Sie, dass diese Zustände

$$k_2 \cot\left(\frac{k_2 a}{\hbar}\right) \quad = \quad -\left(\frac{m_0 V_0}{\kappa_1} + \kappa_1\right),$$

mit $\kappa_1 = -ik_1$ erfüllen.
Hinweise: Zeigen Sie, dass es in diesem Fall weder einlaufende Wellen in Region I noch auslaufende Wellen in Region III gibt. Zeigen Sie, dass Stetigkeit dann auf

$$\Im\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\, e^{-\frac{i}{\hbar}k_2 a}\right) \quad = \quad 0,$$

führt und dass Sie mit einem imaginären $\gamma = i\Gamma$

$$\cot\left(\frac{k_2 a}{\hbar}\right) \quad = \quad \frac{1-\Gamma^2}{2\Gamma}.$$

erhalten.

Aufgabe 3 (15 Punkte): Helizitätsoperator

Der Helizitätsoperator ist definiert als $\hat{\Lambda} = \vec{S} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für ein Spin-1/2 Teilchen die Helizät die Werte $\pm\frac{\hbar}{2}$ annimmt.

(b) (10 Punkte) Geben Sie die Eigenwerte des Helizitätsoperator für ein Teilchen mit Impuls $p = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$ an.