

5. Übungsblatt  
Theoretische Physik 6: WS 2014/15  
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

24.11.2014

**Aufgabe 1 (40 Punkte): Reelles Klein-Gordon Feld**

Verwenden Sie die Entwicklung des reellen Klein-Gordon Feldes nach Normalmoden,

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \left( \frac{\hbar c^2}{2\omega_k L^3} \right)^{1/2} \left[ a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right],$$

und die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= 0, \\ [\dot{\phi}(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] &= 0, \\ [\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] &= i\hbar c^2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

**(a) (20 Punkte)** Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= 0, \\ [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= 0, \\ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}; \end{aligned}$$

**(b) (10 Punkte)** der Hamilton-Operator  $H = \int d^3x \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right]$  in der Form:

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left( a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right),$$

geschrieben werden kann;

(c) (10 Punkte) der Impuls  $\vec{P} = - \int d^3x \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi$  in der Form:

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} \left( a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right),$$

geschrieben werden kann.

## Aufgabe 2 (60 Punkte): Komplexes Klein-Gordon Feld

Das komplexe Klein-Gordon Feld wird verwendet, um geladene Bosonen zu beschreiben. Die entsprechende Lagrange-Dichte ist durch

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi, \quad (1)$$

gegeben, wobei die Felder als

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \left( \frac{\hbar c^2}{2\omega_k L^3} \right)^{1/2} \left[ a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]$$

geschrieben werden können. Die Felder erfüllen die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \Pi_\phi(\vec{x}', t)] &= i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\phi^\dagger(\vec{x}, t), \Pi_{\phi^\dagger}(\vec{x}', t)] &= i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'); \end{aligned}$$

alle anderen Kommutatoren verschwinden. Im folgenden werden wir die Felder  $\phi$  und  $\phi^\dagger$  als unabhängig betrachten.

(a) (15 Punkte) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) äquivalent ist zur Lagrange-Dichte zweier unabhängiger reeller Felder, welche die selbe Masse haben und die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen für reelle Felder erfüllen.

*Hinweis:* Zerlegen Sie das komplexe Feld in zwei reelle Komponenten  $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$

(b) (15 Punkte) Berechnen Sie die Feldoperatoren der konjugierten Impulse  $\Pi_\phi$  und  $\Pi_{\phi^\dagger}$  und leiten Sie die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen für  $a$ ,  $a^\dagger$ ,  $b$  und  $b^\dagger$  her.

(c) (15 Punkte) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) invariant unter globalen Phasentransformationen  $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi$  mit einer reellen Zahl  $\alpha$  ist. Bestimmen Sie den dazugehörigen Noether-Strom  $J^\mu$  und schreiben Sie die erhaltene Ladung  $Q = \int d^3x J^0$  in Abhängigkeit von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

(d) (15 Punkte) Berechnen Sie die Kommutatoren  $[Q, \phi]$  und  $[Q, \phi^\dagger]$ . Verwenden Sie diese Kommutatoren und die Eigenzustände  $|q\rangle$  des Ladungs-Operators  $Q$  um zu zeigen, dass die Feldoperatoren  $\phi$  und  $\phi^\dagger$  die Ladung des Systems ändern. Wie können die Operatoren  $a$ ,  $a^\dagger$ ,  $b$  und  $b^\dagger$  interpretiert werden?