4. Übungsblatt
Theoretische Physik 2: SS2016
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen
Hauptassistent: Leonardo de la Cruz

9.05.2016

Aufgabe 1 (25 Punkte): Legendre-Polynome und assoziierte Funktionen

a) (5 Punkte)
Verwende die erzeugende Funktion der Legendre-Polynome

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, \tag{1}$$

um die folgende Rekursionsbeziehung zu zeigen:

$$(2l+1)xP_l - (l+1)P_{l+1} - lP_{l-1} = 0. \tag{2}$$

b) (10 Punkte)
Zeige:

$$P_m^m(\cos\theta) = (2m-1)!!\ \sin^m\theta, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

wobei die Funktionen P_l^m durch

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, l$$

definiert sind.

c) (10 Punkte)

Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$, deren Polar- und Azimuthalwinkel mit (θ_1, ϕ_1) und (θ_2, ϕ_2) bezeichnet werden. Beweise das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-1}^{+l} Y^*_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}(\theta_2, \phi_2), \tag{4}$$

dabei ist $\theta = \angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ der Winkel zwischen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Die Kugelflächefunktionen sind durch

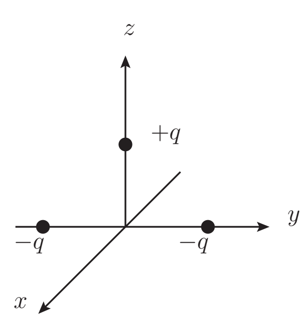
$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \qquad m \geq 0 \tag{5}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta, \phi) \tag{6}$$

definiert.

Aufgabe 2 (20 Punkte): Multipolentwicklung von Punktladungen

Betrachte die folgende Anordnung von Punktladungen in kartesischen Koordinaten: Zwei Ladungen $-q$ befinden sich entlang der y-Achse an den Positionen $y = -a$ und $y = +a$, eine weitere Ladung $+q$ befindet sich auf der z-Achse bei $z = a$.



Bestimme das elektrische Feld für Punkte, die sich sehr weit vom Ursprung entfernt befinden. Drücke das Resultat in sphärischen Koordinaten aus und berücksichtige die beiden niedrigsten Ordnungen in der Multipolentwicklung.

Aufgabe 3 (20 Punkte): Quadrupolmoment eines Ellipsoid

Bestimme das Quadrupolmoment eines gleichmäßig geladenen Ellipsoids mit Halbachsen der Längen a, b, c .

Aufgabe 4 (35 Punkte): Eine dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld

Betrachte das elektrische Feld, das entsteht, wenn man eine dielektische Kugel des Radius R und der Dielektrizitätskonstante ϵ in ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_0$ bringt.

(a) (20 Punkte)

Finde die Grenzbedingungen für das Potential ϕ und berechne das Potential im ganzen Raum (innerhalb und außerhalb der Kugel).

(b) (15 Punkte)

Bestimmte das elektrische Feld $\vec{E}$ im ganzen Raum und die Ladungsdichte ρ innerhalb der Kugel.