4. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS 2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

17.11.2014

Aufgabe 1 (50 Punkte): Skalare Theorie mit $SO(2)$-Invarianz

Betrachten Sie die folgende Lagrangedichte mit zwei realen skalaren Feldern $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2\right] - \frac{m^2}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 . \tag{1}$$

(a) (10 Punkte) Bestimmen Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen.

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte unter der Transformation

$$\phi_1 \to \phi_1' = \phi_1 \cos\theta - \phi_2 \sin\theta, \tag{2}$$

$$\phi_2 \to \phi_2' = \phi_1 \sin\theta + \phi_2 \cos\theta, \tag{3}$$

invariant ist.

(c) (10 Punkte) Berechnen Sie den Noether-Strom j_μ und zeigen Sie explizit, dass die Divergenz von j_μ für Felder ϕ_i, die die Bewegungsgleichungen erfüllen, verschwindet.

(d) (10 Punkte) Zeigen Sie explizit, dass die Noether-Ladung Q eine Erhaltungsgröße ist, falls das Oberflächenintegral $\int \mathrm{d}S\, \vec{n} \cdot \vec{j}$ verschwindet.

(e) (10 Punkte) Bestimmen Sie die Hamilton-Dichte H und zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer mit der nullten Komponente des Noether-Stroms verschwindet. (Nehmen Sie wieder an, dass $\int \mathrm{d}S\, \vec{n} \cdot \vec{j} = 0$).

Aufgabe 2 (50 Punkte): Pionische Atome

Ein Pionisches Atom wird geblidet, wenn ein negatives Pion π^- (ein Spin-0 Boson) in Materie gestoppt und von einem Atom eingefangen wird. Das Pion wird durch sukzessive elektromagnetische Wechselwirkungen mit den Elektronen und Kernen abgebremst. Sobald es die typische Geschwindigkeit der gebundenen Elektronen erreicht hat, wird das Pion eingefangen, wobei es ein Elektron aus seinem Bohr'schen Orbit herauslöst. Das Potential zwischen Pion und Atomkern kann durch einen Potentialtopf $V = -V_0$ für $r \leq R$ und $V = 0$ für $r > R$ mit dem Kernradius R angenähert werden.

(a) (20 Punkte) Benutzen Sie die minimale Kopplung $p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$ mit $A_\mu = (V, \vec{0})$ und zeigen Sie, dass aus der Klein-Gordon Gleichung die folgende radiale Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] u(r) = 0,$$

für das Feld folgt. Dabei ist $k^2 = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[(\epsilon - eV)^2 - m_\pi^2 c^4 \right]$ mit der Energie ϵ des Pions.
Hinweis: Faktorisieren Sie dazu das Klein-Gordon Feld als $\phi(\vec{x}, t) = u(r)\, Y_{lm}(\Omega)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon t}$ mit den Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\Omega)$.

(b) (20 Punkte) Für einen gebunden Zustand gilt $k^2 > 0$ falls $r \leq R$ und $k^2 < 0$ falls $r > R$. Lösen Sie die Gleichung für eine s-Welle ($l = 0$) für beide Fälle.
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(r) = v(r)/r$.

(c) (10 Punkte) Verwenden Sie als Stetigkeitsbedingung bei $r = R$, dass $\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dr} = \frac{1}{u_o}\frac{du_o}{dr}$ und zeigen Sie, dass dies dazu führt, dass die transzendente Gleichung

$$k_i \cot(k_i R) \quad = \quad -k_o,$$

gelöst werden muss. Dabei ist $k_i^2 = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[(\epsilon + eV_0)^2 - m_\pi^2 c^4 \right]$ und $k_o^2 = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left(m_\pi^2 c^4 - \epsilon^2 \right)$.