3. Übungsblatt
Theoretische Physik 2: SS2016
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen
Hauptassistent: Leonardo de la Cruz

2.05.2016

Aufgabe 1 (25 Punkte): Dirac Delta-Distribution

a) (5 Punkte)
Benutze die Eigenschaften der Delta-Distribution um folgendes Integral auszuwerten

$$\int_1^\infty \sin t \, \delta\left(\frac{t^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) \mathrm{d}t$$

b) (10 Punkte)
Betrachte n Punktladungen platziert in einer Ebene an n verschiedenen Punkten $\{P_k\}_{k=1}^n$, welche jeweils durch Polarkoordinaten (r_k, θ_k) beschrieben werden. Es wird vorausgesetzt, dass sich diese Punkte auf einer Kurve $r = g(\theta)$ befinden. Finde mit Hilfe von Dirac Delta-'Funktionen' einen Ausdruck für die Flächenladungsdichte. Benutze diesen Ausdruck für einen Kreis mit Radius a, auf welchem sich die n Ladungen befinden. Die Abstände zwischen zwei benachbarten Ladungen sind durch einen Winkel α festgelegt und die erste Ladung befindet sich auf der x-Achse.

c) (10 Punkte)
Beschreibe mit Hilfe von Delta-Distributionen die dreidimensionale Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ in Polarkoordinaten für eine Ladung Q, welche gleichförmig

über eine flache Scheibe mit vernachlässigbarer Dicke und Radius R verteilt ist.

Aufgabe 2 (20 Punkte): Geladene Walzen und Rohre

a) (10 Punkte)
Ein unendlich langer Vollzylinder mit Radius a trage die homogene Raumladungsdichte ρ_0. Lösen Sie die Potentialgleichung unter Ausnutzung der Symmetrie des Problems jeweils im Inneren und Äuseren des Zylinders.
b) (5 Punkte)
Benutzen Sie die Stetigkeit von Potential und Feld auf der Zylinderoberfläche, um die freien Konstanten in ϕ festzulegen, und skizzieren Sie das resultierende Potential.
c) (5 Punkte)
Ein unendlich langer Hohlzylinder mit radius a und infinitesimaler Wandstärke trage die homogene Fächenladungsdichte ρ_0. Lösen Sie die Potentialgleichung unter Ausnutzung der Symmetrie des Problems jeweils im Inneren un Äußeren des Zylinders.

Aufgabe 3 (25 Punkte): Die Green'sche Funktion einer Kugelschale

Es soll die Green'sche Funktion einer Kugelschale entwickelt werden. Die Funktion erfüllt für ein beliebiges Potential die Gleichung

$$\nabla_x^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

wobei die Deltafunktion dargestellt werden kann durch

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2}\delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Betrachte zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien a und b ($b > a$). Zeige, dass die Entwicklung der Green'schen Funktion einer Kugelschale durch

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{2l+1} \frac{1}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right),$$

gegeben ist, wobei $r_<$ die kleinere der beiden Grössen r, r' und $r_>$ die grössere ist.

Hinweis: Beachte, dass sich eine beliebige Funktion $g(\theta,\phi)$ nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt,

$$g(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi) \quad \text{mit} \quad A_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega Y_{lm}(\theta,\phi)g(\theta,\phi),$$

und dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) = 0,$$

die Lösung $R(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$ besitzt.

Aufgabe 4 (30 Punkte): Potential mit azimuthaler Symmetrie

Betrachte zwei konzentrische Hohlkugeln mit Radien a und b ($b > a$). Jede Hohlkugel ist bezüglich der gleichen horizontalen Ebene in zwei Hemisphären aufgeteilt. Die obere Halbkugel der inneren Kugel und die untere Halbkugel der äusseren Kugel haben das Potential $V = const.$ Die beiden anderen Halbkugeln haben ein Potential von Null.

(a) (15 Punkte)

Bestimme das Potential für den Bereich $a \leq r \leq b$ mit Hilfe einer Entwicklung in Legendre-Polynomen

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta).$$

Finde die Zahlenwerte der Koeffizienten bei einer Entwicklung bis mindestens $l = 4$.

(b) (15 Punkte)
Bestimme das Potential für den Bereich $a \leq r \leq b$ mit Hilfe der Green'schen Funktion in Kugelkoordinaten aus Aufgabe 3. Vergleiche das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil a).

Hinweis: Es kann hilfreich sein, die Orthogonalität der Legendre-Polynome und die Relation

$$\int_0^1 P_l(x)dx = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{2(\frac{l+1}{2})!} & l \text{ ungerade ist} \\ 0 & l \text{ gerade ist} \end{cases}$$

zu benutzen, wobei die Doppelfakultät für ungerade n durch $n!! = n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdots 3 \cdot 1$ gegeben ist.