3. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS 2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

10.11.2014

Aufgabe 1. (10 Punkte): Fermion Wellenfunktionen

Benutzen Sie die 1-Fermion Wellenfunktionen ψ_{is} mit $i = 1, 2$ und $s =\uparrow, \downarrow$, um alle möglichen 2- und 3-Fermionzustände zu konstruieren.

Aufgabe 2. (20 Punkte): Fermionenzahl

Zeigen Sie, dass für Fermionen der Teilchenzahloperator $N = \sum_i a_i^\dagger a_i$ mit dem Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i,j} \langle i|H_0|j\rangle \, a_i^\dagger a_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \langle i,j|V|k,l\rangle \, a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$$

kommutiert.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B = A\{B, C\} - \{A, C\}B$.

Aufgabe 3. (30 Punkte) : Fermionische Operatoren

Betrachte zwei Operatoren a und b, welche die Antikommutatorrelationen

$$\{a, b\} = 1, \qquad \{a, a\} = \{b, b\} = 0, \tag{1}$$

erfüllen.

(a) (5 Punkte) Zeige, dass

$$a^2 = b^2 = 0. \tag{2}$$

(b) (10 Punkte) Zeige, dass $ba(1-ba)=0$. Was bedeutet dies für den Eigenwert von $N=ba$?

(c) (10 Punkte) Überprüfe die Relationen $[N,a]=-a$ und $[N,b]=b$. Wende diese Relationen auf die Eigenzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ von N an. Mit geeigneter Wahl der Phasen erhält man:

$$a|0\rangle = 0, \qquad a|1\rangle = |0\rangle, \qquad b|0\rangle = |1\rangle, \qquad b|1\rangle = 0. \tag{3}$$

(d) (5 Punkte) Zeige, dass (3) impliziert, dass $b=a^\dagger$ der hermitesch konjugierte Operator zu a ist (*i.e.* $\langle m|b|n\rangle = \langle n|a|m\rangle^*$, $\forall\, m,n$).

Es wird deutlich, dass die wichtigen fermionischen Eigenschaften (2) und (3) Konsequenzen der Antikommutatorrelationen (1) sind.

Aufgabe 4. (40 Punkte): Grundzustandsenergie eines dichten Elektronengases in erster Ordnung Störungstheorie

Der Hamilton-Operator eines homogenen Elektronengases ist gegeben durch $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ mit:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\vec{k},s} \left|\vec{k}\right|^2 a^\dagger_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s}\,, \\
\hat{H}_1 &= \frac{e^2}{2V} \sum_{\vec{k},\vec{p}} \sum_{\vec{q}\neq\vec{0}} \sum_{s,s'} \frac{4\pi}{|\vec{q}\,|^2}\, a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},s} a^\dagger_{\vec{p}-\vec{q},s'} a_{\vec{p},s'} a_{\vec{k},s}\,.
\end{aligned}$$

Im Grenzfall hoher Dichte ist $\hat{H}_1$ eine Störung von $\hat{H}_0$. Mit Hilfe der Störungstheorie ist es möglich, die Grundzustandsenergie eines wechselwirkenden Elektronengases für diesen Fall zu berechnen.

(a) (5 Punkte) Drücke den Fermi-Impuls k_F durch den in der Vorlesung definierten Teilchenabstand r_0 aus.

(b) (15 Punkte) Bestimme $\frac{E^{(0)}}{N}$ als Funktion von k_F.

Hinweise:

- $E^{(0)} = \langle\Psi_0|\hat{H}_0|\Psi_0\rangle$.
- Alle Zustände mit Impuls $\left|\vec{k}\right| \leq k_f$ sind besetzt. Die Teilchenanzahl $n_{\vec{k},s}$ lässt sich deswegen durch eine Θ – Funktion beschreiben.

- Im Grenzfall eines Systems von unendlichem Volumen, lässt sich die Summe über Zustände in ein Integral umwandeln:

$$\sum_{\vec{k},s} f_s(\vec{k}\,) \to \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_s \int d^3\vec{k}\, f_s(\vec{k}\,) \tag{4}$$

- In nullter Ordnung beschreiben wir das freie Elektronengas.

(c) (20 Punkte) Zeige, dass

$$E^{(1)} \;=\; -\frac{4\pi e^2 V}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k}\; \theta\left[k_F - \left|\vec{k}\right|\right] \int d^3\vec{q}\; \frac{1}{|q|^2}\; \theta\left[k_F - |\vec{k} + \vec{q}\,|\right].$$

Hinweise:

- $E^{(1)} = \langle \Psi_0 | \hat{H}_1 | \Psi_0 \rangle$.
- Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wirken auf den Grundzustand Ψ_0. Welche Zustände müssen besetzt sein, damit das Matrixelement nicht verschwindet?
- Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren müssen paarweise so kombiniert werden, dass das Matrixelement nicht verschwindet. Wegen der Einschränkung $\vec{q} \neq 0$ gibt es hierfür nur eine Möglichkeit.