2. Übungsblatt
Theoretische Physik 2: SS2016
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen
Hauptassistent: Leonardo de la Cruz

25.04.2016

Aufgabe 1 (20 Punkte): Elektrische und magnetische Feldgleichungen

Leite mit Hilfe der Maxwellgleichungen für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(t, \mathbf{r})$ und Stromdichte $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ eine Gleichung für das elektrische Feld $\mathbf{E}$ abhängig von ρ und $\mathbf{j}$ (unabhängig von $\mathbf{B}$) und eine Gleichung für das magnetische Feld $\mathbf{B}$ abhängig von ρ und $\mathbf{j}$ (unabhängig von $\mathbf{E}$) her.

Aufgabe 2 (20 Punkte): Elektrische Dipolstrahlung

Bei großen Entfernungen von der Quelle, kann man die Felder der elektrischen Dipolstrahlung wie folgt beschreiben

$$\mathbf{E} = a_E \sin\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{B} = a_B \sin\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\mathbf{e}_\phi. \tag{1}$$

Zeige, dass die Maxwell-Gleichungen in Abwesenheit von Quellen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2}$$

arfüllt sind, wenn man annimmt

$$\frac{a_E}{a_B} = \frac{\omega}{ck} = 1. \tag{3}$$

Hinweis. Da r is groß, können Terme der Ordnung r^{-2} vernachlässigt werden.

Aufgabe 3 (30 Punkte): Zusätliche Symmetrien der Maxwell-Gleichungen

a) (20 Punkte)
Betrachte die Transformation C, P, T, deren Wirkung auf Koordinaten und Ladungsdichte durch

$$\begin{array}{llllll} T & \text{(Zeitungskehr)} & t' = -t & \mathbf{x}' = \mathbf{x} & \rho'(t,\mathbf{x}) = \rho(t',\mathbf{x}') \\ P & \text{(Raumspiegelung)} & t' = t & \mathbf{x}' = -\mathbf{x} & \rho'(t,\mathbf{x}) = \rho(t',\mathbf{x}') \\ C & \text{(ladungskonjugation)} & t' = t & \mathbf{x}' = \mathbf{x} & \rho'(t,\mathbf{x}) = -\rho(t',\mathbf{x}') \end{array}$$

gegeben ist. Wie müssen die Stromdichte $\mathbf{j}$ und die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ jeweils transformiert werden, damit die Maxwell-Gleichungen gelten?

b) (10 Punkte)
Zeige, dass die Maxwell-Gleichungen im vakuum unter der Dualitätstransformation $D : \mathbf{B} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} \to -\mathbf{B}$ invariant sind. Was ist D^2?

Aufgabe 4 (30 Punkte): Eichinvarianz

Gegeben sei das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -yB\mathbf{e}_x & x^2+y^2 < R^2 \\ \frac{BR^2}{2(x^2+y^2)}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) - \frac{1}{2}B(y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

(a) (20 Punkte)
Gib die Funktionen Λ_1, Λ_2 für diejenigen Eichtransformationen

$$\mathbf{A}_{1,2}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\Lambda_{1,2}(\mathbf{r})$$

an, die das Vektorpotential in der inneren Region ($x^2 + y^2 < R^2$) auf die Form

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = B(x-y)\mathbf{e}_x$$

bringen. Gib auch die Potentiale im äußeren Bereich an.

b) (10 Punkte)
Welche Vektorpotentiale erfüllen die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$?