

2. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS 2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

03.11.2014

Aufgabe 1 (15 Punkte): Bosonische Wellenfunktionen

Drücke die folgenden N -Bosonen Wellenfunktionen explizit durch Ein-Bosonen Wellenfunktionen $\psi_i(x_j)$ aus.

(a) $\Phi_{1110\dots 0}(x_1, x_2, x_3),$

(b) $\Phi_{0310\dots 0}(x_1, x_2, x_3, x_4),$

(c) $\Phi_{1040\dots 0}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$

Aufgabe 2 (25 Punkte): Anzahl von Bosonen

Zeige, dass für Bosonen der Teilchenanzahloperator $N = \sum_i C_i^\dagger C_i$ mit dem Hamiltonian

$$H = \sum_{i,j} \langle i|H_0|j\rangle C_i^\dagger C_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \langle i,j|V|k,l\rangle C_i^\dagger C_j^\dagger C_k C_l,$$

kommutiert. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Kommutatorrelation?

Aufgabe 3 (25 Punkte): Bosonische Kommutatoren

Berechne die folgenden Kommutatoren von bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

(a) $[N, (C_i^\dagger)^n]$,

(b) $[N, (C_i)^n]$,

(c) $[N, C_i^\dagger C_j^\dagger]$,

(d) $[C_i^\dagger C_j^\dagger, C_k^\dagger C_l^\dagger]$,

(e) $[C_i C_j, C_k^\dagger C_l^\dagger]$.

Aufgabe 4 (35 Punkte): Das Heliumatom

Helium besteht aus zwei Elektronen, die durch die elektromagnetische Wechselwirkung an den Kern gebunden sind, welcher sich aus zwei Protonen und, je nach Isotop, aus ein oder zwei Neutronen zusammensetzt.

(a) (5 Punkte) Wie lautet der Hamiltonian des Zwei-Elektronen-Systems in der Näherung eines unendlich schweren Kerns?

(b) (10 Punkte) Unter der Annahme, dass die Wechselwirkung zwischen den Elektronen als kleine Störung betrachtet werden kann, lässt sich die Wellenfunktion als Produkt der Wellenfunktion der einzelnen Teilchen darstellen. Die gesamte Wellenfunktion des Fermionsystems sollte antisymmetrisch sein und durch das Produkt der Orts- und Spin-Wellenfunktion gegeben sein. Wenn beide Elektronen im $1s$ -Zustand sind, ist die Orts-Wellenfunktion symmetrisch, demnach muss die Spin-Wellenfunktion antisymmetrisch sein. Gib die Spin-Wellenfunktion für diesen Zustand an. Bestimme Spin und Spinprojektion dieses Zustandes (S, S_z).

Hinweis: Der Spinoperator ist durch $\vec{S} = \hbar \frac{\vec{\sigma}}{2}$ gegeben, mit den Pauli-Matrizen $\vec{\sigma}$.

(c) (10 Punkte) Für Elektronen in unterschiedlichen Zuständen lassen sich symmetrische und antisymmetrische Kombinationen der Orts-Wellenfunktionen konstruieren. Gib die Wellenfunktion der möglichen Zustände für Elektronen in $1s$ - und $2s$ -Zuständen an, unter der Annahme, dass die $1s$ - und $2s$ -Wellenfunktionen, ϕ_{1s} and ϕ_{2s} , bekannt sind. Bestimme S und S_z für diese Zustände.

(d) (10 Punkte) Finde die Energieniveaus der in (c) betrachteten Zustände in erster störungstheoretischer Ordnung. Der Unterschied zwischen den Energien ist durch zwei Integrale der Austauschwechselwirkung gegeben. Diskutiere das Ergebnis.