

10. Übungsblatt
Theoretische Physik 2: SS2016
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen
Hauptassistent: Leonardo de la Cruz

27.06.2016

Aufgabe 1 (25 Punkte): Der Skin-Effekt

(a) (10 Punkte)

Silber ist ein sehr guter Leiter, aber auch sehr teuer. Wie dick würde man demnach die Silberbeschichtung eines Mikrowellenexperiments mit 10^{10} Hz wählen? (Der spezifische Widerstand von Silber ist $\rho_{Ag} = 1/\sigma_{Ag} = 1.59 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$)

(b) (15 Punkte)

Berechne die Wellenlänge und Geschwindigkeit von Radiowellen mit einer Frequenz von 1 MHz in Kupfer und vergleiche diese mit den Werten in Luft (bzw. im Vakuum). Berechne die Skin-Tiefe für eine Welle mit einer Frequenz von 60 Hz, 1 MHz, 100 MHz. (Der spezifische Widerstand von Kupfer ist $\rho_{Cu} = 1/\sigma_{Cu} = 1.68 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$)

Aufgabe 2 (35 Punkte): Die TEM Mode

Ein Koaxialkabel besteht aus zwei metallischen, konzentrischen Hohlzylindern mit Radien a und b ($a < b$) zwischen denen sich die Welle ausbreitet. Im Gegensatz zum rechteckigen Wellenleiter sind bei dieser geometrischen Anordnung TEM-Wellen möglich.

(a) (10 Punkte)

Betrachte eine Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

die sich im Leiter ausbreitet. Zeige, dass sich für $E_z = B_z = 0$ aus den Maxwell-Gleichungen die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= 0 \\ \omega = kc, \quad E_y &= -B_x, \quad \text{and} \quad E_x = B_y. \end{aligned} \tag{1}$$

herleiten lassen.

(b) (5 Punkte)

Da E_x und E_y nur Funktionen von x und y sind, kann eine skalares Potential $\phi(x, y)$ eingeführt werden. Zeige, dass für diese Funktion die Relationen (??) auf eine zweidimensionale Laplace-Gleichung zurückgeführt werden können. Stelle die Gleichung in Zylinderkoordinaten auf.

(c) (20 Punkte)

Berechne damit das elektrische und magnetische Feld (in Zylinderkoordinaten). Überprüfe, ob die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} die Randbedingungen erfüllen.

Hinweis: $\phi = A + B \ln(r)$ ist eine Lösung der Laplace-Gleichung unter der gegebenen Symmetrie.

Aufgabe 3 (40 Punkte): Die TM Mode

In der Vorlesung wurde der rechteckige Wellenleiter für $B_z = 0$ untersucht. Für die Lösung von E_z ergibt sich

$$E_z = E_0 \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} e^{i(kz - \omega t)}.$$

(a)(5 Punkte)

Welche TM Moden werden sich in einem Wellenleiter mit dem Querschnitt $2.28\text{cm} \times 1.01\text{cm}$ ausbreiten, wenn die Antriebsfrequenz $1.7 \times 10^{10}\text{Hz}$ ist?

(b)(10 Punkte)

Nehmen wir an, dass wir nur eine TM Mode anregen wollen; welchen Frequenzbereich könnten wir benutzen? Was sind die entsprechenden Wellenlängen (im freien Raum)?

(c)(25 Punkte)

Bestätige, dass die Energie in der TM_{mn} Mode sich mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt. (*Hinweis:* Finde den zeitlich gemittelten Poynting Vektor (\mathbf{S}) und die Energiedichte $\langle u \rangle$. Integriere über den Querschnitt des Wellenleiters, um die transportierte Energie der Welle pro Zeit- und Längeneinheit zu erhalten, und bestimme das Verhältnis.)