

10. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

12.01.2015

Aufgabe 1 (40 Punkte): Energie-Impuls Operator

Drücken Sie die folgenden Größen durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus:

(a) (20 Punkte) Energie: $H = c \int d^3x \bar{\psi}(-i\hbar\gamma^i\partial_i + m_0c)\psi;$

(b) (20 Punkte) Impuls: $\mathbf{P} = -i\hbar \int d^3x \psi^\dagger \nabla \psi.$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Berechnen Sie $[H, b_r^\dagger(\mathbf{p})b_r(\mathbf{p})]$.

Aufgabe 3 (40 Punkte): Axialer Strom

Die chiralen Phasentransformationen für Dirac-Felder sind gegeben durch

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x), \quad \psi^\dagger(x) \rightarrow \psi^{\dagger'}(x) = \psi^\dagger(x)e^{-i\alpha\gamma_5},$$

wobei α ein beliebiger reeller Parameter ist.

(a) (20 Punkte) Zeigen Sie, dass die Dirac Lagrangedichte $\mathcal{L} = c\bar{\psi}(i\hbar\cancel{\partial} - m_0c)\psi$ nur im masselosen Grenzfall ($m_0 = 0$) invariant unter chiralen Phasentransformationen ist, und dass der dazugehörige erhaltene Strom in diesem Limit der axiale Vektorstrom $J_A^\mu \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$ ist.

(b) (20 Punkte) Folgern Sie die Bewegungsgleichungen für die Felder

$$\psi_L(x) \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi(x), \quad \psi_R(x) \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi(x),$$

für nicht-verschwindende Masse und zeigen Sie, dass diese im Grenzfall $m_0 = 0$ entkoppeln.

Die Lagrangedichte $\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}_L\cancel{\partial}\psi_L$ beschreibt demzufolge nur masselose Fermionen mit negativer Helizität und masselose Anti-Fermionen mit positiver Helizität. Dieses Feld wird als Weyl-Feld bezeichnet und kann zur Beschreibung von Neutrinos verwendet werden, solange diese als masselos betrachtet werden können.