

1. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS 2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

27.10.2014

1. Aufgabe (70 Punkte): Nicht-relativistisches Neutronen- und Elektronengas

In Sternen mit extremer Dichte werden durch den inversen Betazerfall, $e^- + p^+ \rightarrow n + \nu$, nahezu alle Protonen und Elektronen in Neutronen umgewandelt. Diese Sterne (sogenannte Neutronensterne) sind stabil, weil die gravitative Anziehung durch den Entartungsdruck der Neutronen (der Druck der Neutronen im freien Neutronengas) ausgeglichen wird. Unter der Annahme einer konstanten Dichte kann der Radius R eines solchen Sterns wie folgt berechnet werden:

(a) (5 Punkte) Drücke die totale Neutronenenergie durch den Radius R , die Anzahl der Neutronen N und die Masse des Neutrons M aus.

(b) (15 Punkte) Berechne die gravitationelle Energie für eine Kugel uniformer Dichte. Drücke das Resultat durch die Gravitationskonstante G , R , N und M aus. Beachte dabei, dass die Gravitationsenergie negativ (attraktiv) ist.

(c) (15 Punkte) Bestimme nun den Wert des Radius, für den die totale Energie, (a) + (b), minimal ist. R ist eine Funktion von $\hbar$, G , M , und N . Bestimme R numerisch als Funktion von N .

(d) (5 Punkte) Was ist der Radius (in km) für einen Neutronenstern mit der Masse der Sonne (die Masse der Sonne ist $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$ kg, die Masse des Nukleons ist $M = 1.674 \times 10^{-27}$ kg)? Vergleiche diesen Radius mit dem Radius der Erde.

(e) (10 Punkte) Bestimme die Fermi-Energie (in MeV) für den in d) betrachteten Neutronenstern und vergleiche diese mit der Ruheenergie des Neutrons. Ist eine relativistische Formulierung erforderlich?

(f) (20 Punkte) Andere kalte Sterne (sogenannte weiße Zwerge) sind stabil, weil die gravitationelle Anziehung durch den Entartungsdruck der Elektronen (den Druck der Elektronen im freien Elektronengas) ausgeglichen wird. Wiederholen (a) – (e) für weiße Zwerge. Hierbei ist q die Anzahl der freien Elektronen per Nukleon und N die Anzahl der Nukleonen (Protonen und Neutronen). Die Masse der Elektronen m kann im Vergleich zur Masse der Nukleonen M vernachlässigt werden. Benutze $q = 1/2$. Sind die Elektronen relativistisch?

2. Aufgabe (30 Punkte): Relativistisches Elektronengas

Erweitere die Theorie des freien Elektronengas für relativistische Elektronen. Ersetze dabei die klassische kinetische Energie $E = p^2/2m$ durch die relativistische Formel:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2, \quad (1)$$

wobei Impuls und Wellenvektor folgenden Zusammenhang erfüllen: $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Im extrem relativistischen Limes gilt: $E \approx pc = \hbar kc$.

(a) (10 Punkte) Berechne für den extrem relativistischen Fall die Gesamtenergie E_{tot} des Elektronengas.

(b) (20 Punkte) Wiederhole Aufgabenteil (a) und (b) aus Aufgabe 1. Die Gesamtenergie hat in diesem Fall kein stabiles Minimum, unabhängig von R . Wenn die Gesamtenergie positiv ist, gewinnt der Entartungsdruck gegen

die Gravitation und der Stern expandiert. Wenn die Gesamtenergie negativ ist, gewinnt die Gravitation und der Stern kollabiert. Bestimme die kritische Anzahl von Nukleonen N_c , sodass für $N > N_c$ der gravitationelle Kollaps eintritt. Dies ist der sogenannte Chandrasekhar Limes: $N_c \approx 2 \times 10^{57}$. Was ist die Masse eines solchen Sterns im Vergleich zur Masse der Sonne? Sterne die schwerer sind werden keine weißen Zwerge bilden sondern kollabieren weiter, und können zu Neutronensterne werden.