Übungsblatt 9

zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 24.06.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

   (a) (1 Punkt) Was versteht man unter dem Begriff Propagator?

2. *Teilchenzahloperator des Klein-Gordon-Felds*

   Die Basiszustände im Fock-Raum des Klein-Gordon-Felds wurden in der Vorlesung mittels der Erzeugungsoperatoren durch $|\vec{q}_n \ldots \vec{q}_1\rangle = a^\dagger_{\vec{q}_n} \ldots a^\dagger_{\vec{q}_1}|0\rangle$ definiert.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $|\vec{q}_n \ldots \vec{q}_1\rangle = P\,|\vec{q}_n \ldots \vec{q}_1\rangle$ für einen beliebigen Teilchenpermutationsoperator P gilt. Welchen Symmetriecharakter besitzen die Zustände des Klein-Gordon-Felds?

   (b) (4 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   $$\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{2E_{\vec{p}}}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} |\vec{q}_n \ldots \vec{q}_1\rangle = n|\vec{q}_n \ldots \vec{q}_1\rangle.$$

3. *Kommutator zu beliebigen Zeiten*

   Wir betrachten den Kommutator von Feldoperatoren des Klein-Gordon-Felds mit Masse m zu beliebigen Zeiten. Dieser lautet

   $$[\Phi(x), \Phi(y)] = \mathrm{i}\Delta(x-y, m),$$

   wobei Δ die kausale Distribution zur Masse m ist:

   $$\Delta(z, m) = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\left[\exp(-\mathrm{i}pz) - \exp(\mathrm{i}pz)\right]\big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}.$$

   (a) (3 Punkte) Weisen Sie nach, dass sich Δ als

   $$\Delta(z, m) = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\,\delta\left(p^2 - m^2\right)\mathrm{sgn}\left(p^0\right)\exp(-\mathrm{i}pz)$$

   darstellen lässt.

   (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass sich aus dem Kommutator $[\Phi(x), \Phi(y)]$ der Kommutator zu gleichen Zeiten

   $$[\Phi(x), \Pi(y)]|_{x^0 = y^0} = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

   ableiten lässt.

4. *Green'sche Funktionen des Klein-Gordon-Operators*

   Die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit δ-Inhomogenität werden allgemein als Green'sche Funktionen bezeichnet.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen ohne die Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 5, dass der Feynman-Propagator eine Green'sche Funktion des Klein-Gordon-Operators ist, d.h. es gilt

$$\left(\partial_{x,\mu}\partial^{x,\mu} + m^2\right) \langle 0| T\left\{\Phi(x)\,\Phi(y)\right\} |0\rangle = -\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y)\,.$$

Die Kommutationsrelationen zu gleichen Zeiten können bei der Lösung hilfreich sein.

5. *Feynman-Propagator*

Der Feynman-Propagator ist durch den Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren definiert:

$$G_{\mathrm{F}}(x-y) = \langle 0| T\left\{\Phi(x)\,\Phi(y)\right\} |0\rangle.$$

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass sich der Feynman-Propagator als

$$G_{\mathrm{F}}(x-y) = \mathrm{i}\Theta\left(x^0-y^0\right)\Delta^{+}(x-y,m) - \mathrm{i}\Theta\left(y^0-x^0\right)\Delta^{-}(x-y,m)$$

darstellen lässt. Hierbei sind

$$\Delta^{+}(z,m) = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,\exp(-\mathrm{i}pz)\big|_{p^0=E_{\vec{p}}}\,,$$
$$\Delta^{-}(z,m) = \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,\exp(\mathrm{i}pz)\big|_{p^0=E_{\vec{p}}}\,.$$

(b) (5 Punkte) Der Feynman-Propagator lässt sich ebenfalls als

$$G_{\mathrm{F}}(x-y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}\,\exp\left(\mathrm{i}p(x-y)\right)$$

schreiben. Führen Sie diesen Ausdruck auf den Ausdruck in Aufgabenteil a zurück, indem Sie die Integration über p^0 mittels des Residuensatzes durchführen. Wählen Sie hierzu abhängig von der Zeitordnung von x und y geeignete Integrationswege in der komplexen p^0-Ebene. Begründen Sie kurz, welche Teile des gewählten Integrationswegs zum Integral beitragen und welche nicht.