Übungsblatt 8
zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig

Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 17.06.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

- (a) (1 Punkt) Wie lauten die bosonischen Quantisierungsbedingungen für mehrkomponentige Felder?
- (b) (1 Punkt) Was versteht man unter einem normal geordneten Produkt von Operatoren und warum wird dieses eingeführt?

2. *Leiteroperatoren des Klein-Gordon-Felds*

Der Feldoperator Φ und der kanonische Impulsoperator Π des Klein-Gordon-Felds lassen sich durch die Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ darstellen:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \left[f_p(x) a_{\vec{p}} + f_p^*(x) a_{\vec{p}}^\dagger \right]_{p^0=E_{\vec{p}}},$$
$$\Pi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \left[(\partial_0 f_p(x)) a_{\vec{p}} + (\partial_0 f_p^*(x)) a_{\vec{p}}^\dagger \right]_{p^0=E_{\vec{p}}}.$$

Hierbei ist $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und $f_p(x) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-ipx)$.

- (a) (4 Punkte) Drücken Sie a und $a^\dagger$ durch Φ und Π aus, indem Sie die Fourier-Transformation invertieren und geeignete Linearkombinationen bilden. Reproduzieren Sie so die in der Vorlesung gegebenen Ausdrücke.

3. *Hamilton- und Impuls-Operator des Klein-Gordon-Felds*

Der Hamilton-Operator H und der Impulsoperator $\vec{P}$ des Klein-Gordon-Felds ausgedrückt durch den Feldoperator Φ und den kanonischen Impulsoperator Π mit den in Aufgabe 2 verwendeten Darstellungen lauten

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\Pi(x)^2 + \left(\vec{\nabla} \Phi(x) \right)^2 + m^2 \Phi(x)^2 \right], \quad \vec{P} = - \int d^3x \Pi(x) \vec{\nabla} \Phi(x).$$

- (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass sich der Hamilton-Operator als

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} E_{\vec{p}} \left[a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \right]$$

schreiben lässt.

- (b) (2 Punkte) Zeigen Sie ebenfalls, dass sich der Impulsoperator als

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \vec{p} \left[a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \right]$$

darstellen lässt. Es kann hilfreich sein, die Transformationseigenschaft des Impulsintegrals unter $\vec{p} \mapsto -\vec{p}$ zu betrachten und die Kommutationsrelationen der Leiteroperatoren auszunutzen.

4. *Bosonische Quantisierung des Schrödinger-Felds*

In Aufgabe 4 von Übungsblatt 7 haben Sie das klassische Schrödinger-Feld betrachtet und die kanonisch konjugierten Impulse bestimmt.

- (a) (2 Punkte) Quantisieren Sie das Schrödinger-Feld bosonisch. Berücksichtigen Sie hierbei nur voneinander unabhängige Felder. Leiten Sie hieraus die Kommutationsrelationen der Feldoperatoren Ψ und $\Psi^\dagger$ her. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den in der Vielteilchen-Quantenmechanik hergeleiteten Kommutationsrelationen.

5. *Komplexes Klein-Gordon-Feld*

Wir betrachten ein zweikomponentiges reellwertiges Feld $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ mit zugehöriger Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi_i) - m^2 \phi_i^2].$$

Wir konstruieren durch Linearkombination komplexe Felder $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ und $\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$.

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte durch die Felder φ und φ^* ausgedrückt

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \varphi_i)^* (\partial^\mu \varphi_i) - m^2 \varphi^* \varphi.$$

lautet.

- (b) (2 Punkte) Weisen Sie nach, dass die Transformation $\varphi(x) \mapsto \exp(i\alpha)\varphi(x)$ mit reellem α eine Symmetrie der Wirkung ist. Berechnen Sie weiter mittels des Noether'schen Theorems ausgehend von der infinitesimalen Version der Symmetrietransformation die zugeordnete erhaltene Stromdichte und geben Sie die entsprechende Noether-Ladung an.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie explizit durch Nachrechnen unter Verwendung der Bewegungsgleichungen, dass die Divergenz der Stromdichte verschwindet.
- (d) (1 Punkt) Wir führen mittels minimaler Kopplung durch die Ersetzung $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu(x)$ eine Wechselwirkung zwischen dem geladenen Klein-Gordon-Feld und dem elektromagnetischen Feld ein. Zeigen Sie, dass die Wechselwirkung durch

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = ieA_\mu (\varphi^* \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi^*) \varphi) + e^2 A_\mu A^\mu \varphi^* \varphi$$

beschrieben wird.

- (e) (1 Punkt) Berechnen Sie nun die Stromdichte bezüglich $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$ und zeigen Sie, dass sich diese auch durch die Ersetzungsvorschrift aus Aufgabenteil d aus der Stromdichte aus Aufgabenteil b gewinnen lässt.
- (f) (2 Punkte) Quantisieren Sie das durch $\mathcal{L}_0$ beschriebene komplexe Klein-Gordon-Feld bosonisch. Drücken Sie den Hamilton-Operator H und den der erhaltenen Noether-Ladung zugeordneten Operator Q durch die Feldoperatoren Φ und $\Phi^\dagger$ und die Operatoren der kanonischen Impulse Π und $\Pi^\dagger$ aus.
- (g) (3 Punkte) Zeigen Sie mittels der Heisenberg-Bewegungsgleichung, dass Φ und $\Phi^\dagger$ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen. Nutzen Sie hierzu auch den Zusammenhang zwischen Feldoperatoren und den Operatoren der kanonischen Impulse.