

Übungsblatt 7
zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig

Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 10.06.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

- (a) (1 Punkt) Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen für mehrkomponentige Felder? Wie hängen Lagrange-Dichte und Hamilton-Dichte für mehrkomponentige Felder zusammen?
- (b) (1 Punkt) Formulieren Sie das Noether-Theorem für klassische Feldtheorien.

2. *Feldoperatoren von Spin-1/2-Fermionen*

In Aufgabe 3 von Übungsblatt 6 haben Sie den Hamilton-Operator $H^{(n)}$ eines wechselwirkenden n -Fermionen-Systems durch die Feldoperatoren Ψ und $\Psi^\dagger$ ausgedrückt. Das Ergebnis lautete

$$H^{(n)} = \sum_{\sigma} \int d^3x \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_{\vec{x}}^2 + U(\vec{x}) \right) \Psi_{\sigma}(\vec{x}) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int d^3x_1 d^3x_2 \Psi_{\sigma_1}^{\dagger}(\vec{x}_1) \Psi_{\sigma_2}^{\dagger}(\vec{x}_2) V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \Psi_{\sigma_2}(\vec{x}_2) \Psi_{\sigma_1}(\vec{x}_1).$$

Wir wählen U und V reell, da sonst $H^{(n)}$ nicht hermitesch ist, und V symmetrisch, d.h. $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Die Feldoperatoren befolgen die Antikommutationsrelationen

$$\{\Psi_{\sigma_1}(\vec{x}_1), \Psi_{\sigma_2}(\vec{x}_2)\} = \{\Psi_{\sigma_1}^{\dagger}(\vec{x}_1), \Psi_{\sigma_2}^{\dagger}(\vec{x}_2)\} = 0, \\ \{\Psi_{\sigma_1}(\vec{x}_1), \Psi_{\sigma_2}^{\dagger}(\vec{x}_2)\} = \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta_{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Wir betrachten nun die Feldoperatoren in der Heisenberg-Darstellung. Operatoren werden in dieser explizit zeitabhängig,

$$O(\vec{x}, t) = U^{(n)\dagger}(t, 0) O U^{(n)}(t, 0),$$

wobei wir $O(\vec{x}, 0) = O(\vec{x})$ setzen. Beachten Sie, dass $H^{(n)}$ keine explizite Zeitabhängigkeit aufweist, sodass wir den Zeitentwicklungsoperator als $U^{(n)}(t, 0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H^{(n)} t\right)$ schreiben können. Die zeitliche Variation der Operatoren in der Heisenberg-Darstellung ist durch die Heisenberg-Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O(\vec{x}, t) = -[H^{(n)}, O(\vec{x}, t)]$$

gegeben.

- (a) (8 Punkte) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren Ψ und $\Psi^\dagger$. Da zur Berechnung nur die Antikommutationsrelationen für $t = 0$ zur Verfügung stehen, sollten Sie die rechte Seite der Heisenberg-Bewegungsgleichung unter Zuhilfenahme der Zeitentwicklungsoperatoren durch die Feldoperatoren bei $t = 0$ ausdrücken. Die Identität $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ kann zur Evaluation des Kommutators hilfreich sein. Drücken Sie nach Berechnung aller (Anti-)Kommutatoren wieder die Feldoperatoren durch Feldoperatoren in Heisenberg-Darstellung aus.
- (b) (1 Punkt) In einem Ein-Teilchen-System wird die Teilchendichte am Ort $\vec{x}_0$ durch den Operator

$$\rho^{(1)}(\vec{x}_0) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

gemessen. Hierbei ist $\vec{x}$ der Ortsoperator, $\vec{x}_0$ jedoch nur ein Parameter. Wie lautet der entsprechende n -Teilchen-Operator $\rho^{(n)}(\vec{x}_0)$?

- (c) (2 Punkte) Wie lautet $\rho^{(n)}(\vec{x}_0)$ in Besetzungszahldarstellung? Nutzen Sie hierzu die Konventionen aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 6.
- (d) (1 Punkt) Drücken Sie nun $\rho^{(n)}(\vec{x}_0)$ mittels Feldoperatoren aus.

Hinweis:

Wirken innerhalb von Integralen Differentialoperatoren auf die δ -Distribution, so können diese mittels partieller Integration auf die anderen Integranden umgewälzt werden:

$$\int d^3x f(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = - \int d^3x \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} f(\vec{x}) \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = - \vec{\nabla}_{\vec{y}} f(\vec{y}).$$

3. Maxwell-Gleichungen

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Potentials A_μ lautet in kovarianter Form mit Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu.$$

- (a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen des elektromagnetischen Potentials in kovarianter Form. Leiten Sie hieraus die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in nicht-kovarianter Form ab. Nutzen Sie hierzu die Zusammenhänge $E^i = -F^{0i}$ und $\epsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$ zwischen elektromagnetischem Feld und Feldstärketensor sowie $j^0 = \rho$.
- (b) (2 Punkte) Der Feldstärketensor erfüllt die Gleichung $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta F^{\gamma\delta} = 0$. Leiten Sie aus dieser die homogenen Maxwell-Gleichungen in nicht-kovarianter Form ab.

4. Euler-Lagrange-Gleichungen und Hamilton-Dichte

Wir betrachten die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\psi^* \vec{\nabla}\psi - U\psi^*\psi$$

mit raum- und zeitabhängigen Potential $U(\vec{x}, t)$.

- (a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen zu $\mathcal{L}$. Hierbei sind ψ und ψ^* als zwei unabhängige Felder anzusehen. Erkennen Sie die Gleichungen wieder?
- (b) (2 Punkte) Berechnen Sie die zu den Feldern ψ und ψ^* kanonisch konjugierten Impulse π und π^* sowie die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}$.