

Übungsblatt 6
zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig

Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 03.06.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

- (a) (1 Punkt) Warum schlägt die Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung als quantenmechanische Ein-Teilchen-Theorie fehl?

2. *Hamilton-Operator eines n -Elektronen-Systems in Besetzungszahldarstellung*

Gegeben sei ein aus n Elektronen bestehendes System im unendlichen Volumen.

- (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie eine Basis für ein Ein-Elektron-System im unendlichen Volumen bestehend aus Basiszustände $|\vec{k}\sigma\rangle$. Nutzen Sie hierzu ebene Wellen in Ortsdarstellung mit Wellenvektor $\vec{k}$ und z -Komponente des Spins σ . Die Basisvektoren soll bezüglich des kontinuierlichen Index $\vec{k}$ und des diskreten Index σ orthonormiert sein.
- (b) (7 Punkte) Formulieren Sie den Hamilton-Operator $H^{(n)}$, welcher das n -Elektronen-System beschreibt, in Besetzungszahldarstellung bezüglich der in Aufgabenteil a definierten Ein-Elektron-Basis. Berücksichtigen Sie dabei ebenfalls die spinunabhängige Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen.
- (c) (2 Punkte) Untersuchen Sie Ihr Ergebnis für $H^{(n)}$ unter dem Aspekt der Impuls- und Teilchenzahlerhaltung. Eine explizite Berechnung von Kommutatoren mit dem Gesamtimpuls- und Gesamtteilchenzahloperator ist hierbei nicht notwendig.

Hinweise:

Führen Sie zur Berechnung der Matrixelemente der Coulomb-Wechselwirkung eine geeignete Koordinatentransformation durch, z.B. hin zu Relativ- und Mittelpunktsskoordinaten. Bedenken Sie, dass der Transformationssatz ebenfalls die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation beinhaltet. Formen Sie auftretende Integrale über komplexe Exponentialfunktionen wenn möglich in δ -Distributionen um. Für das verbleibende Integral können Sie die Identität

$$\int d^3x \frac{1}{\|\vec{x}\|} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) = \frac{4\pi}{\|\vec{q}\|^2}$$

mit geeigneter Wahl für $\vec{q}$ nutzen.

3. *Feldoperatoren von Spin-1/2-Fermionen*

Gegeben seien die zueinander orthonormalen Einteilchenbasisvektoren $|\lambda\sigma\rangle$ mit Wellenfunktionen $\langle \vec{x}\sigma | \lambda\sigma \rangle = \psi_\lambda(\vec{x})$, wobei λ ein diskreter Index sei und σ die Spinausrichtung beschreibt. Hieraus folgen

$$\sum_{\lambda} \psi_{\lambda}^*(\vec{x}_1) \psi_{\lambda}(\vec{x}_2) = \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \quad \int d^3x \psi_{\lambda_1}^*(\vec{x}) \psi_{\lambda_2}(\vec{x}) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\lambda\sigma}^\dagger$ und $a_{\lambda\sigma}$ gehorchen den Antikommutationsrelationen $\{a_{\lambda_1\sigma_1}, a_{\lambda_2\sigma_2}\} = \{a_{\lambda_1\sigma_1}^\dagger, a_{\lambda_2\sigma_2}^\dagger\} = 0$ und $\{a_{\lambda_1\sigma_1}, a_{\lambda_2\sigma_2}^\dagger\} = \delta_{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2}$. Das System werde durch den Ein-Fermion-Hamilton-Operator in Orts-Spin-Darstellung

$$\langle \vec{x}_1\sigma_1 | H_0^{(1)} | \vec{x}_2\sigma_2 \rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_{\vec{x}_2}^2 + U(\vec{x}_2) \right) \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta_{\sigma_1\sigma_2}$$

sowie durch den die Wechselwirkung beschreibende Zwei-Fermion-Operator

$$\langle \vec{x}_1\sigma_1, \vec{x}_2\sigma_2 | V^{(2)} | \vec{x}_3\sigma_3, \vec{x}_4\sigma_4 \rangle = V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \delta^{(3)}(\vec{x}_2 - \vec{x}_4) \delta_{\sigma_1\sigma_3} \delta_{\sigma_2\sigma_4}$$

beschrieben. Weiter definieren wir nun Feldoperatoren Ψ und $\Psi^\dagger$ mittels

$$\Psi_\sigma(\vec{x}) = \sum_\lambda \psi_\lambda(\vec{x}) a_{\lambda\sigma}, \quad \Psi_\sigma^\dagger(\vec{x}) = \sum_\lambda \psi_\lambda^*(\vec{x}) a_{\lambda\sigma}^\dagger.$$

- (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den n -Fermionen-Hamilton-Operator $H^{(n)}$ in Besetzungszahldarstellung.
- (b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Antikommutatorrelationen der Feldoperatoren Ψ und $\Psi^\dagger$.
- (c) (1 Punkt) Drücken Sie $H^{(n)}$ mittels der Feldoperatoren Ψ und $\Psi^\dagger$ aus.

4. Klein'sches Paradoxon

Berechnen Sie die stationären Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung in $1+1$ Dimensionen für ein Boson, welches sich in einem Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ bewegt. Nehmen Sie an, dass $E^2 > m^2$ gilt, wobei $m > 0$ die Masse des Teilchens ist. Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet unter Berücksichtigung eines Potentials

$$(E - V)^2 = p^2 + m^2.$$

Die Wellenfunktionen für die Bereiche $x < 0$ und $x > 0$ können durch

$$\begin{aligned} \phi_{<}(x) &= \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \\ \phi_{>}(x) &= C \exp(ik'x) \end{aligned}$$

parametrisiert werden.

- (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten B und C mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen bei $x = 0$.
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Wellenzahlen k und k' . Unterscheiden Sie hierbei die drei Fälle $m \leq E - V_0$, $-m < E - V_0 < m$ und $E - V_0 \leq -m$.
- (c) (5 Punkte) Bestimmen Sie für alle drei Fälle den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis:

Wählen Sie k positiv. Wegen der Annahme $E^2 > m^2$ ist letzteres immer reell. Wählen Sie k' ebenfalls positiv, falls reell. Warum ist dies sinnvoll und richtig?