Übungsblatt 5
zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 27.05.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

   (a) (1 Punkt) Zwischen welchen beiden Räumen bildet der bosonische Teilchenvernichtungsoperator ab? Durch welche Bedingungen wird dieser definiert? Wie sehen die Bedingungen in Besetzungszahldarstellung aus?

   (b) (1 Punkt) Erläutern Sie den Begriff des Feldoperators. Welche Vertauschungsrelationen erfüllt dieser im fermionischen bzw. im bosonischen Fall?

2. *Besetzungszahldarstellung allgemeiner Operatoren*

   Auf Übungsblatt 4 haben Sie gezeigt, dass sich ein n-Fermionen-Operator $O_1^{(n)}$, der aus einer Summe identischer Einteilchen-Operatoren $O_{1,i}^{(1)}$ besteht,

$$O_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} O_{1,i}^{(1)},$$

   als

$$O_1^{(n)} = \sum_{\alpha,\beta} \langle \varphi_\alpha | O_1^{(1)} | \varphi_\beta \rangle \, a_\alpha^\dagger a_\beta$$

   schreiben lässt. Hierbei ist $(|\varphi_\nu\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis des zugrunde liegenden Einteilchen-Hilbertraums.

   (a) (15 Punkte) Zeigen Sie nun, dass sich ein n-Teilchen-Operator $O_2^{(n)}$, der aus einer Summe identischer Zweiteilchen-Operatoren $O_{2,ij}^{(1)}$ besteht,

$$O_2^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} O_{2,ij}^{(2)},$$

   als

$$O_2^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2} \langle \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} | O_2^{(2)} | \varphi_{\beta_1} \varphi_{\beta_2} \rangle \, a_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger a_{\beta_2} a_{\beta_1}$$

   schreiben lässt. Betrachten Sie hierzu die Matrixelemente der beiden Ausdrücke bezüglich der Basis $|\varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_n}^{(A)}\rangle$ mit $\nu_1 < \ldots < \nu_n$ und $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}_0$ des $\mathscr{H}^{(n,A)}$. Orientieren Sie sich an der Herleitung für die Darstellung von $O_1^{(n)}$. Für $O_2^{(n)}$ werden jedoch zustätzlich solche Matrixelemente nicht verschwinden, bei denen sich die Indices der beiden Basisvektoren bis auf Permutation in zwei Indices unterscheiden.

(b) (2 Punkte) Wie in der Vorlesung betrachten wir nun einen n-Fermionen-Hilbertraum mit zugrundeliegender Einteilchen-Basis $(|i\rangle)_{i\in\mathbb{N}_0}$, wobei die Basisvektoren durch ihre Ortsdarstellung über Wellenfunktionen $\langle\vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x})$ definiert sind. Die Basis ist als orthonormal anzunehmen. Die entsprechende orthonormale Basis des n-Fermionen-Hilbertraums ist in Ortsdarstellung durch

$$\langle x_1,\ldots,x_n|\psi_{\underline{c}}\rangle = \psi_{\underline{c}}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{P\in\mathfrak{S}_n}\sigma(P)\,\psi_{c_{P(1)}}(x_1)\ldots\psi_{c_{P(n)}}(x_n)$$

definiert. Gegeben sei weiter der Hamilton-Operator

$$H^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} H_{0,i}^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} V_{ij}^{(2)}.$$

Die Anteile lauten in Ortsdarstellung

$$\langle\vec{x}_1|H_0^{(1)}|\vec{x}_2\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}_{\vec{x}_2}^2 + U(\vec{x}_2)\right)\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\,,$$
$$\langle\vec{x}_1,\vec{x}_2|V^{(2)}|\vec{x}_3,\vec{x}_4\rangle = V(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\,\delta^{(3)}(\vec{x}_1-\vec{x}_3)\,\delta^{(3)}(\vec{x}_2-\vec{x}_4)\,.$$

Beachten Sie, dass der Differentialoperator auch auf mögliche Funktionen hinter der δ-Distribution wirkt. Stellen Sie unter Zuhilfenahme der Erkenntnisse aus Aufgabenteil a sowie aus Aufgabe 4a von Übungsblatt 4 den Hamilton-Operator $H^{(n)}$ in der Besetzungszahldarstellung dar. Berechnen Sie hierzu die relevanten Matrixelemente bezüglich der Einteilchenbasis $(|i\rangle)_{i\in\mathbb{N}_0}$ bzw. der entsprechenden Zweiteilchenbasis. Drücken Sie diese mit den Wellenfunktionen $\psi_i(\vec{x})$ sowie mit der Ortsdarstellung der Operatoren aus.

3. *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Bosonen im Fock-Raum*

In der Vorlesung wurden die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren b_α und $b_\alpha^\dagger$ eingeführt. Der zugrundeliegende Index α sei diskret. Machen Sie von der Besetzungszahldarstellung Gebrauch.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie die Kommutationsrelationen $[b_\alpha, b_\beta] = [b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger] = 0$ und $[b_\alpha, b_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie für den Besetzungszahloperator $n_\alpha = b_\alpha^\dagger b_\alpha$ die Kommutatoren $[n_\alpha, b_\beta^\dagger]$ und $[n_\alpha, b_\beta]$.