Übungsblatt 4

zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 20.05.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

   (a) (1 Punkt) Wir betrachten den $\mathscr{H}^{(n,A)}$ mit abzählbarer Basis. Sowohl die Menge der Vektoren $|\varphi_{\nu_1}\ldots\varphi_{\nu_n}^{(A)}\rangle$ mit $\nu_1 < \ldots < \nu_n$ und $\nu_1,\ldots\nu_n \in \mathbb{N}_0$ als auch die Menge der Vektoren in Besetzungszahldarstellung $|n_0, n_1, n_2, \ldots^{(A)}\rangle$ mit $n_i = 0, 1$ für $i \in \mathbb{N}_0$ bilden eine Basis. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Mengen?

   (b) (1 Punkt) Zwischen welchen beiden Räumen bildet der fermionische Teilchenvernichtungsoperator ab? Durch welche Bedingungen wird dieser definiert? Warum ist ersterer durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt? Wie sehen die Bedingungen in Besetzungszahldarstellung aus?

   (c) (1 Punkt) Was ist der Fock-Raum und wie wird dieser konstruiert?

2. *Anharmonischer Oszillator*

   Der Hamilton-Operator eines eindimensionalen anharmonischen Oszillators sei durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{m^2\omega^3}{10\hbar}x^4$$

   gegeben.

   (a) (4 Punkte) Führen Sie das Ritz'sche Variationsverfahren unter der Verwendung der Versuchsfunktionenschar

$$\psi(x,\alpha) = \exp\left(-\alpha x^2\right) \text{ mit } \alpha > 0$$

   mit dem Variationsparameter α durch.

   Hinweise:
   Verwenden Sie zur Berechnung der Integrale die Identität

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, \xi^{2n} \exp\left(-\beta\xi^2\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!\beta^n}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

   Benutzen Sie außerdem, dass die kubische Gleichung $x^3 - ax - b = 0$ über eine relle Lösung

$$x = u + \frac{a}{3u} \text{ mit } u = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

   verfügt.

3. *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen im Fock-Raum*

   Benutzen Sie für die folgenden Berechnungen die Antikommutationsrelationen von fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. $n_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha$ ist der Besetzungszahloperator.

   (a) (2 Punkte) Berechnen Sie $(a_\alpha)^2$ und $\left(a_\alpha^\dagger\right)^2$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

   (b) (2 Punkte) Berechnen Sie $(n_\alpha)^2 - n_\alpha$. Schließen Sie hieraus auf mögliche Eigenwerte von n_α.

   (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $a_\alpha n_\alpha = a_\alpha$, $a_\alpha^\dagger n_\alpha = 0$, $n_\alpha a_\alpha = 0$ und $n_\alpha a_\alpha^\dagger = a_\alpha^\dagger$.

4. *Besetzungszahldarstellung allgemeiner Operatoren*

   In der Vorlesung haben Sie die Besetzungszahldarstellung für einen Hamilton-Operator in Ortsdarstellung, der ein n-Fermion-System beschreibt, hergeleitet.

   (a) (6 Punkte) Zeigen Sie nun für einen allgemeinen n-Teilchen-Operator $O^{(n)}$, der aus einer Summe identischer Einteilchen-Operatoren $O_i^{(1)}$ besteht,

   $$O^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} O_i^{(1)},$$

   dass sich dieser als

   $$O^{(n)} = \sum_{\alpha,\beta} \langle \varphi_\alpha | O^{(1)} | \varphi_\beta \rangle a_\alpha^\dagger a_\beta$$

   schreiben lässt. Betrachten Sie hierzu die Matrixelemente der beiden Ausdrücke bezüglich der Basis $|\varphi_{\nu_1} \dots \varphi_{\nu_n}^{(A)}\rangle$ mit $\nu_1 < \ldots < \nu_n$ und $\nu_1, \ldots \nu_n \in \mathbb{N}_0$ des $\mathscr{H}^{(n,A)}$. Verfahren Sie dann in Analogie zur Vorlesung.

   Hinweis:
   Erkenntnisse aus den Aufgaben 3a und 3c von Übungsblatt 1 können hilfreich sein.

5. *n-Elektronen-System und Operatoren in Besetzungszahldarstellung*

   Wir betrachten ein System aus n freien Elektronen. Die Einteilchen-Basiszustände seien $|\vec{k}, \sigma\rangle$, wobei der Wellenzahlvektor $\vec{k}$ diskrete Werte und σ die Werte $\uparrow$ und $\downarrow$ annehme.

   (a) (2 Punkte) Stellen Sie den Gesamtimpulsoperator

   $$\vec{p}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i^{(1)}$$

   durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dar.

   (b) (2 Punkte) Stellen Sie die x-Komponente des Gesamtspinoperators

   $$s_x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} s_{xi}^{(1)}$$

   ebenfalls durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dar.

   (c) (2 Punkte) Berechnen Sie den Kommutator aus Gesamtimpulsoperator und x-Komponente des Gesamtspinoperator. Interpretieren Sie das Ergebnis.