Übungsblatt 2

zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig   Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 06.05.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

   (a) (1 Punkt) Was besagt das Spin-Statistik-Theorem und in welchem Zusammenhang steht es zu den Symmetrieeigenschaften quantenmechanischer Zustände?

   (b) (1 Punkt) Erläutern Sie den Unterschied zwischen Ortho- und Para-Helium. Welche Dimensionen haben die jeweiligen Spinzustandsräume?

2. *Symmetrie und Zeitentwicklung*

   Gegeben sei ein System n identischer Teilchen.

   (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ mit jedem Permutationsoperator vertauscht, wobei $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$. Nutzen Sie hierfür die n-Teilchen-Schrödinger-Gleichung, sowie Eindeutigkeitsaussagen zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.

   (b) (1 Punkt) Welchen Schluss kann man daraus für das Verhalten der Symmetrie von Zuständen unter Zeitentwicklung ziehen?

3. *Dimensionen von $\mathscr{H}^{(n)}$, $\mathscr{H}^{(n,S)}$ und $\mathscr{H}^{(n,A)}$*

   Der Einteilchen-Hilbertraum $\mathscr{H}^{(1)}$ habe die Basis $(|\varphi_\nu\rangle)_\nu$. Wir betrachten den n-Teilchen-Hilbertraum $\mathscr{H}^{(n)}$ sowie dessen Unterräume $\mathscr{H}^{(n,S)}$ und $\mathscr{H}^{(n,A)}$ für $n \geq 2$.

   (a) (4 Punkte) Auf Übungsblatt 1 haben wir die Basis des $\mathscr{H}^{(n,S)}$ als die Menge der Zustände

   $$|\varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_n}^{(S)}\rangle = S|\varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_n}\rangle \text{ mit } \nu_1 \leq \ldots \leq \nu_n$$

   und die Basis des $\mathscr{H}^{(n,A)}$ als die Menge der Zustände

   $$|\varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_n}^{(A)}\rangle = A|\varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_n}\rangle \text{ mit } \nu_1 < \ldots < \nu_n$$

   definiert. Zeigen Sie, dass es sich hierbei tatsächlich um Basen handelt.

   (b) (3 Punkte) Der Einteilchen-Hilbertraum $\mathscr{H}^{(1)}$ sei nun endlich dimensional mit Basis $(|\varphi_\nu\rangle)_{\nu=1\ldots d}$. Welche Dimensionen haben $\mathscr{H}^{(n)}$, $\mathscr{H}^{(n,S)}$ und $\mathscr{H}^{(n,A)}$?

4. *Para-Helium*

   Der Zwei-Elektronen Hamilton-Operator des Helium-Atoms mit unendlich schwerem Kern ist gegeben durch $H = H_0 + \Delta H$ mit

   $$H_0 = \frac{(\vec{p}_1)^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{(\vec{p}_2)^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_2}, \quad \Delta H = \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \quad r_i = \|\vec{x}_i\| \text{ für } i = 1, 2.$$

(a) (11 Punkte) Berechnen Sie die Korrektur zur Grundzustandsenergie von Para-Helium in erster Ordnung Störungstheorie bezüglich der Störung ΔH. Alle auftretenden Integrale sind von Hand zu lösen.

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie den numerischen Wert der Korrektur.

Hinweise:
Die normierte Ortswellenfunktion des Grundzustands für das Ein-Elektron-Atom mit unendlich schwerem Kern mit Kernladungszahl Z mit Hamilton-Operator

$$H^{(1)} = \frac{(\vec{p})^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \qquad\qquad r = \|\vec{x}\|$$

lautet

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_{\mathrm{B}}}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{Zr}{a_{\mathrm{B}}}\right),$$

wobei a_{B} der Bohrsche Radius ist. Nutzen Sie zur Auswertung der auftretenden Integrale die Multipolentwicklung der Abstandsfunktion

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} &= \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\alpha)}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\alpha)) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1)\, Y_{lm}(\theta_2, \phi_2)
\end{aligned}$$

mit $r_< = \min(r_1, r_2)$ und $r_> = \max(r_1, r_2)$ sowie die Orthogonalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen

$$\int \mathrm{d}\Omega\, Y_{l'm'}^*(\theta, \phi)\, Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm}.$$

Zur Lösung auftretender Integrale ist es hilfreich,

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

in Kombination mit der obigen Orthogonalitätsrelation anzuwenden.