Übungsblatt 12

zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 15.07.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Permutationsoperatoren*

   Sei $\left(|\varphi_\nu\rangle\right)_\nu$ eine orthonormierte Basis eines Einteilchen-Hilbertraumes $\mathscr{H}^{(1)}$. Die Zustände $|\varphi_{\nu_1}\dots\varphi_{\nu_n}\rangle = |\varphi_{\nu_1}\rangle\dots|\varphi_{\nu_n}\rangle$ bilden dann eine Basis des zugehörigen n-Teilchen-Hilbertraumes $\mathscr{H}^{(n)}$ mit $n \geq 2$. Wir definieren die Wirkung des Permutationsoperators auf einen n-Teilchen-Zustand durch

   $$P|\psi_1\dots\psi_n\rangle = |\psi_{P(1)}\dots\psi_{P(n)}\rangle.$$

   Der Unterraum der symmetrischen Zustände in $\mathscr{H}^{(n)}$ ist $\mathscr{H}^{(n,S)}$ und der der antisymmetrischen Zustände $\mathscr{H}^{(n,A)}$.

   (a) (2 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass Permutationsoperatoren auf $\mathscr{H}^{(n,S)}$ und $\mathscr{H}^{(n,A)}$ hermitesch sind.

2. *Fermionische Leiteroperatoren*

   Wir betrachten fermionische Leiteroperatoren a und $a^\dagger$. Diese befolgen die Anti-Kommutationsrelationen

   $$\{a, a^\dagger\} = 1, \qquad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0.$$

   (a) (1 Bonuspunkt) Zeigen Sie, dass gilt:

   $$\exp\left(-\alpha a^\dagger\right)\, a \exp\left(\alpha a^\dagger\right) = a - \alpha^2 a^\dagger + \alpha\left(a a^\dagger - a^\dagger a\right).$$

   (b) (2 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass gilt:

   $$\exp\left(-\alpha a^\dagger a\right)\, a^\dagger \exp\left(\alpha a^\dagger a\right) = \exp\left(-\alpha\right) a^\dagger.$$

3. *Spindichte-Operator in Besetzungszahldarstellung*

   Gegeben seien die zueinander orthonormalen Einteilchenbasisvektoren $|\lambda\sigma\rangle$ mit Wellenfunktionen $\langle\vec{x}\sigma|\lambda\sigma\rangle = \psi_\lambda\left(\vec{x}\right)$, wobei λ ein diskreter Index sei und σ die Spinausrichtung beschreibt. Hieraus folgen

   $$\sum_\lambda \psi^*_\lambda\left(\vec{x}_1\right)\psi_\lambda\left(\vec{x}_2\right) = \delta^{(3)}\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right), \qquad \int \mathrm{d}^3x\, \psi^*_{\lambda_1}\left(\vec{x}\right)\psi_{\lambda_2}\left(\vec{x}\right) = \delta_{\lambda_1\lambda_2}.$$

   Die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger_{\lambda\sigma}$ und $a_{\lambda\sigma}$ gehorchen den Antikommutationsrelationen $\{a_{\lambda_1\sigma_1}, a_{\lambda_2\sigma_2}\} = \{a^\dagger_{\lambda_1\sigma_1}, a^\dagger_{\lambda_2\sigma_2}\} = 0$ und $\{a_{\lambda_1\sigma_1}, a^\dagger_{\lambda_2\sigma_2}\} = \delta_{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2}$. Weiter definieren wir nun Feldoperatoren Ψ und $\Psi^\dagger$ mittels

   $$\Psi_\sigma\left(\vec{x}\right) = \sum_\lambda \psi_\lambda\left(\vec{x}\right) a_{\lambda\sigma}, \qquad \Psi^\dagger_\sigma\left(\vec{x}\right) = \sum_\lambda \psi^*_\lambda\left(\vec{x}\right) a^\dagger_{\lambda\sigma}.$$

(a) (1 Punkt) In einem Ein-Teilchen-System wird die z-Komponente der Spindichte am Ort $\vec{x}_0$ durch den Operator

$$s_z^{(1)}(\vec{x}_0) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)\, s_z$$

gemessen. Hierbei ist $\vec{x}$ der Ortsoperator, $\vec{x}_0$ jedoch nur ein Parameter. s_z ist die z-Komponente des gewöhnlichen Spin-Operators. Wie lautet der entsprechende n-Teilchen-Operator $s_z^{(n)}(\vec{x}_0)$?

(b) (2 Punkte) Wie lautet $s_z^{(n)}(\vec{x}_0)$ in Besetzungszahldarstellung?

(c) (1 Punkt) Drücken Sie $s_z^{(n)}(\vec{x}_0)$ mittels Feldoperatoren aus.

4. *Axiale Symmetrie*

Gegeben sei die Lagrange-Dichte des Dirac-Feldes

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - \left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)\gamma^\mu\psi\right) - m\bar{\psi}\psi.$$

(a) (2 Bonuspunkte) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen für die Felder ψ und $\bar{\psi}$.

(b) (2 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$\psi(x) \mapsto \exp\left(-\mathrm{i}\alpha\gamma^5\right)\psi(x) \qquad \bar{\psi}(x) \mapsto \bar{\psi}(x)\exp\left(-\mathrm{i}\alpha\gamma^5\right)$$

im Allgemeinen keine Symmetrie der Wirkung ist. Unter welcher Bedingung an m wird diese zu einer Symmetrie?

(c) (1 Bonuspunkt) Berechnen Sie für die geeignete Wahl von m den zugehörigen Noether-Strom.

(d) (1 Bonuspunkt) Weisen Sie explizit unter der Zuhilfenahme der Bewegungsgleichungen nach, dass der Noether-Strom für die geeignete Wahl von m erhalten ist.