Übungsblatt 11

zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig   Oberassistent: Andreas Risch

Abgabe: Freitag, 08.07.2016, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Wiederholungsfragen*

   (a) (1 Punkt) Was versteht man unter einer eigentlich orthochronen Lorentz-Transformation? Welche Auswirkung hat letztere auf die Zeitrichtung und auf die Orientierung eines Dreibeins im Raum?

   (b) (1 Punkt) Formulieren Sie den Zerlegungssatz der eigentlich orthochronen Lorentz-Transformationen.

   (c) (1 Punkt) Unter einer Zusammenhangskomponente versteht man die Menge aller Transformationen, die stetig ineinander überführbar sind. Aus wie vielen Zusammenhangskomponenten besteht die Lorentz-Gruppe? Durch welche Lorentz-Transformationen lassen sich die Zusammenhangskomponenten ineinander überführen?

2. *Lorentz-Transformationen des Dirac-Feldes*

   In der Vorlesung haben Sie die Menge der Rotationen als Teilmenge der Lorentz-Transformationen betrachtet und die Darstellung dieser für Raumzeit-Vektoren und Dirac-Spinoren bestimmt. Wir untersuchen nun Boosts in beliebig orientierter Rapidität $\vec{\eta}$ mit der Konvention $\omega_{0i} = -\omega_{i0} = \eta^i$ und $\omega_{ij} = \omega_{00} = 0$.

   (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Form einer Lorentz-Transformation Λ für Raumzeit-Vektoren, die einen infinitesimalen Boost mit beliebiger Rapidität $\vec{\eta}$ darstellt. Verwenden Sie hierzu

   $$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \omega^{\alpha}{}_{\beta}.$$

   Leiten Sie die endliche Transformation für einen Boost in x^1-Richtung her:

   $$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\eta^1) & \sinh(\eta^1) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta^1) & \cosh(\eta^1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Form einer Lorentz-Transformation $S(\Lambda)$ für Dirac-Spinoren, die einen infinitesimalen Boost in beliebiger Richtung $\vec{\eta}$ darstellt. Verwenden Sie hierzu

   $$S(\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}].$$

   Leiten Sie die endliche Transformation für einen Boost in x^1-Richtung her:

   $$S(\Lambda) = \cosh\left(\frac{\eta^1}{2}\right)\mathbb{1} + \sinh\left(\frac{\eta^1}{2}\right)\gamma^0\gamma^1.$$

(c) (5 Punkte) Eine allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung mit positiver Frequenz und mit Impuls p^1 in x^1-Richtung ist laut Vorlesung durch den Dirac-Spinor

$$\psi\left(x\right) = \exp\left(-\mathrm{i}p^0x^0 + \mathrm{i}p^1x^1\right)\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix}\left(p^0+m\right)\chi\\ p^1\sigma^1\chi\end{pmatrix}$$

mit $p^0 = \sqrt{\left(p^1\right)^2 + m^2}$ gegeben, wobei die Dirac-Matrizen in Standard-Darstellung genutzt wurden. Reproduzieren Sie dieses Ergebnis, indem Sie von der Lösung für ein ruhenden Teilchens ausgehen, d.h. $p^1 = 0$, und dann durch geeignete aktive Lorentz-Transformation mittels $x' = \Lambda x$ und $\psi'\left(x'\right) = S\left(\Lambda\right)\psi\left(x\right)$ die Lösung boosten. Wählen Sie die Rapidität η^1 so, dass der Boost das Teilchen aus der Ruhe auf den Impuls p^1 beschleunigt.

3. *Bilineare Kovarianten der Dirac-Spinoren*

In der Vorlesung haben Sie das Transformationsverhalten von aus Dirac-Spinoren bestehenden Bilinearformen betrachtet.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie das Transformationverhalten der Pseudoskalardichte $\bar{\psi}\left(x\right)\gamma^5\psi\left(x\right)$ unter Lorentz-Transformation.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie das Transformationverhalten der Axialstromdichte $\bar{\psi}\left(x\right)\gamma^\mu\gamma^5\psi\left(x\right)$ unter Lorentz-Transformation.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass man keinen symmetrischen Tensor zweiter Stufe aus den γ-Matrizen und den Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ bilden kann.

4. *Gesamtdrehimpulserhaltung im Zentralpotential*

Wir betrachten die Dirac-Gleichung unter Berücksichtigung eines Zentralpotential. Diese lautet

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\vec{p}\cdot\vec{\alpha} + \beta\, m + \Phi\left(|x|\right)\mathbb{1}_4\right)\psi$$

mit den Matrizen

$$\alpha^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_2 & 0\\ 0 & -\mathbb{1}_2\end{pmatrix}.$$

Der Gesamtdrehimpulsoperator des Systems $\vec{J}$ ist durch

$$\vec{J} = \vec{L}\,\mathbb{1}_4 + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}, \qquad \vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}, \qquad \Sigma^i = \begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix}$$

definiert.

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie den Kommutator des Hamilton-Operators und des Gesamtdrehimpulses und zeigen Sie so, dass der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße ist.

(b) (1 Punkt) Sind Spin und Bahndrehimpuls auch unabhängig voneinander erhalten?