Übungsblatt 0

zur Vorlesung
"Theorie V - Höhere Quantenmechanik"
im Sommersemester 2016

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut Wittig   Oberassistent: Andreas Risch

Präsenzübung für Mittwoch, 27.04.2016.
Bitte vermerken Sie die zur Bearbeitung benötigte Zeit auf Ihrer Abgabe.

1. *Einteilchen-Hilbertraum*

   Sei $(|\varphi_{x,i}\rangle)_{x,i}$ eine orthonormierte Basis eines Einteilchen-Hilbertraumes $\mathscr{H}^{(1)}$. x sei ein kontinuierlicher Index, i ein diskreter.

   (a) (0 Punkte) Welchen Wert nimmt das Skalarprodukt zweier Basiselemente an?

   (b) (0 Punkte) Geben Sie die Vollständigkeitsrelation bezüglich der gegebenen Basis an.

   (c) (0 Punkte) Entwickeln Sie zwei Zustände $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ bezüglich der gegebenen Basis. Wie können Sie die Entwicklungskoeffizienten berechnen? Stellen Sie das Skalarprodukt $\langle\psi|\chi\rangle$ mittels der Entwicklungskoeffizienten dar. Welche Bedingung muss für die Entwicklungskoeffizienten gelten, damit $|\psi\rangle$ ein normierter Zustand ist?

2. *n-Teilchen-Hilbertraum*

   Wir konstruieren nun einen Hilbertraum n identischer Teilchen

   $$\mathscr{H}^{(n)} = \mathscr{H}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}^{(1)}.$$

   Wir definieren n-Teilchenzustände, die in ein Produkt aus Einteilchenzuständen zerfallen, wie folgt:

   $$|\alpha^{(n)}\rangle = |\alpha^1 \ldots \alpha^n\rangle = |\alpha^1\rangle \ldots |\alpha^n\rangle.$$

   $\mathscr{H}^{(n)}$ ist nun als Raum aller Linearkombinationen solcher Produktzustände definiert.

   (a) (0 Punkte) Wie sieht das Skalarprodukt zweier Zustände $|\psi^{(n)}\rangle$ und $|\chi^{(n)}\rangle$, die in ein Produkt aus Einteilchenzuständen zerfallen, ausgedrückt durch Einteilchenskalarprodukte aus?

   (b) (0 Punkte) Wie sieht das Skalarprodukt zweier allgemeiner Zustände $|\psi^{(n)}\rangle$ und $|\chi^{(n)}\rangle$ aus? Stellen Sie hierzu $|\psi^{(n)}\rangle$ und $|\chi^{(n)}\rangle$ als Linearkombinationen von Produktzuständen dar.

   (c) (0 Punkte) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für $\mathscr{H}^{(n)}$ unter zuhilfenahme der Basis von $\mathscr{H}^{(1)}$.

   (d) (0 Punkte) Geben Sie die Vollständigkeitsrelation bezüglich der konstruierten Basis an.

   (e) (0 Punkte) Entwickeln Sie einen Zustand $|\psi^{(n)}\rangle$ bezüglich der Basis. Wie können Sie die Entwicklungskoeffizienten berechnen? Welche Bedingung muss für die Entwicklungskoeffizienten gelten, damit $|\psi^{(n)}\rangle$ ein normierter Zustand ist? Wie sehen die Entwicklungskoeffizienten aus, wenn es sich bei $|\psi^{(n)}\rangle$ um einen Produktzustand handelt?

(f) (0 Punkte) Sei $H^{(1)}$ der Hamilton-Operator des zugrundeliegenden Einteilchenproblems. Geben Sie unter der Annahme, dass die Teilchen untereinander nicht wechselwirken, den Hamilton-Operator $H^{(n)}$ des n-Teilchenproblems an. Machen Sie sich klar, wie $H^{(n)}$ auf Produktteilchenzustände wirkt. Es kann hilfreich sein, sich vor Augen zu führen, dass ein linearer Operator A, der auf dem k-ten Einteilchenraum definiert ist, sich durch

$$A \mapsto \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\mathbb{1}} \otimes \cdots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ k-1}}{\mathbb{1}} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{A} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ k+1}}{\mathbb{1}} \otimes \cdots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{\mathbb{1}}$$

auf dem n-Teilchenraum fortsetzen lässt.

3. *(Anti-)Symmetrisierung von Zuständen*

Auf $\mathscr{H}^{(n)}$ definieren wir den Symmetrisierungsoperator S und den Antisymmetrisierungsoperator A durch

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_n} P \qquad\qquad A = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_n} \sigma(P)\, P.$$

$\mathfrak{S}_n$ ist die symmetrische Gruppe, d.h. die Menge aller Permutationen einer n-elementigen Menge. $\sigma(P)$ ist das Signum einer Permutation P. Die Permutationen P operieren auf den n-Teilchen-Produktzuständen und vertauschen die zugrunde liegenden Einteilchenzustände:

$$P|\alpha^1 \ldots \alpha^n\rangle = |\alpha^{P(1)} \ldots \alpha^{P(n)}\rangle.$$

Für allgemeine Zustände werden die Operatoren S und A linear fortgesetzt.

(a) (0 Punkte) Symmetrisieren Sie den Zustand $|\alpha\beta\gamma\rangle$. Was geschieht für $\alpha = \beta$?

(b) (0 Punkte) Antisymmetrisieren Sie den Zustand $|\alpha\beta\gamma\rangle$. Was geschieht für wenn $\alpha = \beta$?

(c) (0 Punkte) Beschreiben $S|\alpha\beta\gamma\rangle$ und $S|\beta\alpha\gamma\rangle$ den gleichen physikalischen Zustand? Warum bzw. warum nicht?

(d) (0 Punkte) Beschreiben $A|\alpha\beta\gamma\rangle$ und $A|\beta\alpha\gamma\rangle$ den gleichen physikalischen Zustand? Warum bzw. warum nicht?