Übungsblatt 7

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 12.06.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte auch die benötigte Bearbeitungszeit auf dem Abgabezettel vermerken!

1. *Harmonischer Oszillator*

Gegeben sei der Hamiltonoperator:

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kx^2 :$$

(a) (3 Punkte) Benutze die Heisenbergsche Unschärferelation um die minimal zulässige Energie des Systems zu bestimmen.

Hinweis: Betrachte nur den Erwartungswert des Grundzustandes. Die Wellenfunktionen des Grundzustandes im Impuls- bzw. Ortsraum sind symmetrische Funktionen von p bzw. x.

(b) (2 Punkte) Die Wellenfunktion des Grundzustands lautet

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-(\mu\omega/2\hbar)x^2}.$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich dass Teilchen ausserhalb der klassischen Zone befindet.

2. *Heisenberg-Algebra*

In dieser Aufgabe soll die Äquivalenz der Heisenbergschen Beschreibung der Quantenmechanik durch Matrizen mit der Beschreibung von Schrödinger durch Wellengleichungen gezeigt werden. Wir betrachten dazu die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a:

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\phi_0 \quad , \quad (\phi_0, \phi_0) = 1$$
$$a^\dagger\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1} \quad , \quad a\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$$

(a) (1 Punkt) Berechne die Matrix des Ortsoparators $\{x\} = \{(\phi_m, x\phi_n)\}$.

(b) (1 Punkt) Berechne die Matrix des Impulsoparators $\{p\} = \{(\phi_m, p\phi_n)\}$.

(c) (2 Punkte) Berechne explizit (durch Matrixmultiplikation) den Kommutator $[\{p\}, \{x\}]$. Vergleiche das Ergebnis mit dem bekannten Kommutator $[p, x]$.

Hinweis: Drücke Orts- und Impulsoperator durch die Leiteroperatoren aus und berechne die ersten vier Zeilen und Spalten der Matrixdarstellung.

3. *Eigenfunktionen des Ortsoperators*

Gegeben sei der Ortsoperator x und der Impulsoperator p_x in einer Dimension.

(a) (2 Punkte) Berechne den Kommutator

$$\left[x, \exp\left(i\frac{p_x a}{\hbar}\right)\right].$$

(b) (2 Punkte) Der Ortsoperator x erfülle die Eigenwertgleichung

$$x\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle$$

mit dem Eigenwert x'. Zeige, dass auch $\exp\left(i\frac{p_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle$ ein Eigenzustand von x ist und bestimme den zugehörigen Eigenwert.

(c) (2 Punkte) Sei $f(x)$ eine Funktion, die sich als Potenzreihe schreiben lässt, d.h. $f(x) = \sum_n c_n x^n$. Zeige, dass

$$\exp\left(i\frac{p_x a}{\hbar}\right) f(x) \exp\left(-i\frac{p_x a}{\hbar}\right) = f(x+a)$$

Hinweis: Füge in geschickter Weise *Einsen* ein und beweise die Gleichung zuerst für $f(x) = x$.

4. *Pauli-Matrizen*

Betrachte die Matrixdarstellung der Operatoren $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 Punkte) Berechne die Eigenwerte und die normalisierten Eigenvektoren zu diesen Operatoren.

(b) (1 Punkt) Berechne die Kommutatoren $[\sigma_i, \sigma_j]$.

(c) (2 Punkte) Zeige die folgende Unschärferelation

$$\Delta\sigma_1 \Delta\sigma_2 \geq \frac{1}{2}|\langle[\sigma_1, \sigma_2]\rangle|,$$

wobei die Erwartungswerte für den Zustand

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ausgewertet werden sollen.