Übungsblatt 5
zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 29.05.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte ab diesem Übungsblatt auch die benötigte Bearbeitungszeit auf dem Abgabezettel vermerken!

1. *Der dreidimensionale Potentialtopf und das Deuteron*

Das Deuteron ist der leichteste Atomkern nach dem Proton. Das Deuteron besteht aus einem Neutron und einem Proton. Die Bindungsenergie des Deuterons beträgt $B = 2.225\,\mathrm{MeV}$.

Die radiale Schrödingergleichung lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}u''(r) + \left[\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} + V(r)\right]u(r) = Eu(r).$$

($\psi(\vec{x}) = \frac{u(r)}{r}Y_\ell^m(\theta,\phi)$, mit den Kugelflächenfunktionen $Y_\ell^m(\theta,\phi)$, die nicht zur Lösung dieser Aufgabe benötigt werden). Die Randbedingung für $u(r)$ bei $r=0$ ist $u(r) \sim r^{\ell+1}$. Wir untersuchen nun das Potential

$$V(r) = \begin{cases} V_0, \ 0 \le r < \ell_0, & (V_0 < 0) \\ 0, \ r > \ell_0 \end{cases}$$

(a) (3 Punkte) Wir betrachten zunächst Streuzustände, $E > 0$. Zeige, dass die allgemeine Lösung für $u(r)$ im Bereich $r > \ell_0$ der Form

$$\frac{u(r)}{r} = \alpha_\ell j_\ell(kr) + \beta_\ell n_\ell(kr), \qquad k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$$

ist, wobei

$$j_\ell(x) = -x^{\ell-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{j_{\ell-1}(x)}{x^{\ell-1}}\right), \qquad j_0(x) = \frac{\sin x}{x},$$
$$n_\ell(x) = -x^{\ell-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{n_{\ell-1}(x)}{x^{\ell-1}}\right), \qquad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

die *sphärischen Besselfunktionen* sind. Hinweis: Zeige, dass $u(r) = rf_\ell(kr)$ die Gleichung löst (mit $f_\ell(kr) = j_\ell(kr)$ oder $n_\ell(kr)$) und argumentiere schliesslich, dass die allgemeine Lösung die obengeschriebene Gleichung sein muss. Benutze zusätzlich, dass $f_{\ell-1}(x) + f_{\ell+1}(x) = \frac{2\ell+1}{x}f_\ell(x)$ um auf das Ergebnis zu kommen.

(b) (3 Punkte) Berechne die radiale Funktion $u(r)$ für $E > 0$ und $\ell = 0$.

(c) (3 Punkte) Allgemein ist die Streuphase δ_ℓ für ein kurzreichweitiges Potential durch

$$e^{2i\delta_\ell} = \frac{\alpha_\ell + i\beta_\ell}{\alpha_\ell - i\beta_\ell}$$

gegeben. Gib $\cot \delta_0(k)$ an, sowie die Koeffizienten a_0 und r_0 der Taylorentwicklung

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a_0} + \frac{r_0}{2} k^2 + \mathrm{O}(k^4).$$

(der Parameter a_0 wird *Streulänge* genannt und r_0 die *effektive Reichweite*).

(d) (2 Punkte) Berechne die radiale Funktion $u(r)$ für $E < 0$ und $\ell = 0$ und gib die algebraische Gleichung an, die die Bindungsenergie erfüllen muss.

2. *Heisenbergsche Bewegungsgleichungen*

(a) (2 Punkte) Zeige, dass für die Erwartungswerte von $\vec{L}$ und $\vec{N}$ der Zusammenhang

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{L} \rangle = \langle \vec{N} \rangle$$

gilt. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ist dabei der Drehimpulsoperator und $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ der Operator des Drehmoments.

(b) (2 Punkte) Ein Teilchen bewege sich in einem zeitunabhängigen Potential $V(\vec{r})$. Zeige, dass der Erwartungswert eines zeitunabhängigen Operators O für Eigenzustände des Hamiltonoperators zeitlich konstant ist

$$\frac{d}{dt}\langle O \rangle = 0$$

(c) (1 Punkt) Zeige, dass der Erwartungswert für stationäre Zustände die Gleichung

$$\frac{1}{m}\langle \vec{p}^2 \rangle = \langle \vec{r} \cdot \nabla V(\vec{r}) \rangle$$

erfüllt. **Hinweis:** Benutze Teil (b) für den Operator $\vec{r} \cdot \vec{p}$

3. *Identitäten der Delta-Distribution*

Die δ-Distribution hat die definierende Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)$$

Zeige die folgenden Identitäten:

(a) (1 Punkt) $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \qquad (\alpha \neq 0)$,

(b) (1 Punkt) $\delta(x^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2|\alpha|}\left(\delta(x-\alpha) + \delta(x+\alpha)\right)$,

(c) (1 Punkt) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \frac{d^n}{d^n x}\delta(x) = (-1)^n f^{(n)}(0)$,

(d) (1 Punkt) $\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik\cdot(x-x_0)}$.