Übungsblatt 10

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig   Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 03.07.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte auch die benötigte Bearbeitungszeit auf dem Abgabezettel vermerken!

1. *Neutrinooszillation*

   Das Standardmodell der Teilchenphysik kennt drei Neutrinoarten, das Elektron-Neutrino (ν_e), das Myon-Neutrino (ν_μ) und das Tau-Neutrino (ν_τ). Experimentell ist bekannt, dass es Mischungen (Oszillation), zwischen diesen drei Neutrinoarten gibt. Nehmen wir an, dass die Neutrinozustände $|\nu_e\rangle$ und $|\nu_\mu\rangle$ durch Mischungen der Energieeigenzustände $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ und $|\Psi_3\rangle$ in der folgenden Form beschrieben werden:

   $$|\nu_e\rangle = \frac{1}{2}|\Psi_1\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}|\Psi_2\rangle$$
   $$|\nu_\mu\rangle = \frac{3}{4}|\Psi_1\rangle - \sqrt{\frac{3}{16}}|\Psi_2\rangle - \frac{1}{2}|\Psi_3\rangle \; .$$

   Die Zustände $|\Psi_i\rangle$ seien orthonormierte Energieeigenzustände zu den Energien $E = m_i c^2$. Zur Zeit t = 0 befinde sich das System in einem Elektron-Neutrino Zustand.

   (a) (3 Punkte) Berechne zu einem Zeitpunkt t > 0 die Wahrscheinlichkeit P_{ν_μ}, das Neutrino in einem μ-Neutrino-Zustand zu finden.
   Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit ist gegeben als Betragsquadrat der Übergangsamplitude:
   $$P_{\nu_\mu} = |\langle\nu_\mu|\Psi_e(t)\rangle|^2$$

   (b) (2 Punkte) Berechne zu einem Zeitpunkt t > 0 die Wahrscheinlichkeit P_{ν_τ}, das Neutrino in einem τ-Neutrino-Zustand zu finden.
   Hinweis: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen in einem der drei Neutrinozustände zu finden, muss 1 sein.

   (c) (1 Punkt) Was passiert im Grenzfall gleicher Massen m_i?

2. *Kugelflächenfunktionen*

   Ein System werde durch die Wellenfunktion
   $$\Psi(x,y,z) = N \cdot (x+y+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)/a^2}$$
   beschrieben

   (a) (6 Punkte) Berechne die Wellenfunktion in Kugelkoordinaten und bringe diese auf die Form:
   $$\Psi(x,y,z) = f(r)\chi(\theta,\phi) \, .$$
   Zeige, dass $\chi(\theta,\phi)$ als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen $Y_{11}(\theta,\phi)$, $Y_{1,-1}(\theta,\phi)$ und $Y_{10}(\theta,\phi)$ geschrieben werden kann und bestimme die Normierungskonstante N.

(b) (2 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von L^2 einen Zustand mit $0\hbar^2$ bzw. $2\hbar^2$ zu finden?

3. *Symmetrisierung des Impulsoperators*

In der klassischen Mechanik kann man für den Realteil des Impulses p_r die folgende Beziehung angeben:

$$p_r = \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{r} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}$$

(a) (1 Punkt) Zeige, dass die obige Version für den Operator p_r nicht hermitesch ist.

(b) (2 Punkte) Zeige, dass die symmetrisierte Version

$$p_r' = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r} \right)$$

ein hermitescher Operator ist.

(c) (3 Punkte) Zeige, dass ${p_r'}^2$ die folgende Form hat:

$${p_r'}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$