Kanonische Quantisierung des Klein-Gordon-Felds

1. Die Klein-Gordon-Gleichung $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$
   wird als klassische Feldgleichung betrachtet und nicht als quantenmechanische Wellengleichung mit ϕ als Wellenfunktion.

2. Die Klein-Gordon-Gleichung folgt aus der klassischen Lagrangedichte

   $$\mathcal{L}_{\mathrm{KG}}(\phi, \partial_\mu\phi) = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - m^2\phi^2)$$

   Die Euler-Lagrange-Gleichungen

   $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0$$

   implizieren die Klein-Gordon-Gleichung

3. Konjugierter Impuls $\pi(x)$ und Hamiltondichte $\mathcal{H}$ definiert durch

   $$\pi(x) := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}, \qquad \mathcal{H} = \pi(x)\,(\partial_0\phi(x)) - \mathcal{L}$$

Kanonische Quantisierung des Klein-Gordon-Felds

4. Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes durch Ersetzung von $\phi(x)$ und $\pi(x)$ durch operatorwertige Funktionen $\Phi(x)$ und $\Pi(x)$ mit Vertauschungsregeln (*equal time commutators*):

$$[\Phi(x),\Pi(y)]\big|_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[\Phi(x),\Phi(y)]\big|_{x^0=y^0} = [\Pi(x),\Pi(y)]\big|_{x^0=y^0} = 0$$

5. Die Entwicklung von $\Phi(x)$ und $\Pi(x)$ nach Erzeugern und Vernichtern führt auf

$$[a_{\vec{p}},a_{\vec{q}}^{\dagger}] = 2E_p\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}), \qquad [a_{\vec{p}},a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^{\dagger},a_{\vec{q}}^{\dagger}] = 0$$

Die physikalischen Zustände bilden einen Fock-Raum und unterliegen der Bose-Einstein-Statistik.

Kanonische Quantisierung des Klein-Gordon-Felds

Eine Basis von physikalischen, multi-bosonischen Zuständen konstruiert man aus

$$|0\rangle \; : \qquad \text{Vakuumzustand,} \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

$$a^\dagger_{\vec{q}}\,|0\rangle = |\vec{q}\rangle \; : \qquad \text{Ein-Boson-Zustand, positive Energie}$$

$$a_{\vec{q}}\,|0\rangle = 0 \; : \qquad \text{Zustände mit negativer Energie ausgeschlossen}$$

6. Energie und Impuls sind definiert durch die <u>normalgeordneten</u> Operatoren

$$:H: = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{2E_p}\, E_p\, a^\dagger_{\vec{p}}\, a_{\vec{p}}, \qquad :\vec{P}: = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{2E_p}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}}\, a_{\vec{p}}$$

Die Normalordnung garantiert, dass die Energie des Vakuums abgezogen und die Gesamtenergie eines Fock-Zustands nicht-negativ wird.