Quantisierung des Dirac-Felds

- Betrachte Dirac-Gleichung als Bewegungsgleichung für ein klassisches 4-komponentiges Feld
- Ersetze Dirac-Spinor durch entsprechenden Feld-Operator
- Fordere Vertauschungsregeln

Klassische Lösung:

$$\psi(x) = \sum_{s=\pm 1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} 2E_p} \left\{ \alpha_s(\vec{p}) u_s(\vec{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \beta_s^*(\vec{p}) v_s(\vec{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} \right\}$$

Feldoperator:

$$\Psi(x) = \sum_{s=\pm 1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} 2E_p} \left\{ a_s(\vec{p}) u_s(\vec{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + b_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} \right\}$$

$a_s(\vec{p}),\ a_s^\dagger(\vec{p}),\ b_s(\vec{p}),\ b_s^\dagger(\vec{p})$: Erzeuger/Vernichter

Quantisierung des Dirac-Felds

Zustände im Fock-Raum:

Vernichter $a_s(p)$, $b_s(p)$, angewandt auf den Vakuumzustand muss verschwinden:

$$a_s(\vec{p})|0\rangle = 0, \quad b_s(\vec{p})|0\rangle = 0$$

Wegen $s = \pm 1/2$ kann man zu festem Impuls 4 Einteilchenzustände aufbauen:

$$a_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \quad b_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \quad s = \pm 1/2$$

Konvention:

Identifiziere das Elektron (2 linear unabhängige Spinzustände) mit $a_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle$

Dann entspricht $b_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle$ einem Teilchen mit gleicher Masse:

Positron: gleiche Masse, entgegengesetzte Ladung

Quantisierung des Dirac-Felds

Klassische Lagrangedichte: $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$

Konjugierter Impuls:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0\psi)}\left\{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\right\} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger(x)$$

Klassische Hamiltonfunktion:

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H} = \int d^3x\left\{\pi(x)\partial_0\psi(x) - \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi)\right\}$$

$$= \int d^3x\left\{\psi^\dagger(-i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + \gamma^0 m)\psi\right\} = \int d^3x\left\{\psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi\right\}$$

$$= \int d^3x\,\psi^\dagger i\partial_0\psi \equiv i\int d^3x\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi$$

Quantisierung des Dirac-Felds

Hamilton-Operator für die quantisierte Theorie:

$$H = i\int d^3x\,\overline{\Psi}(x)\gamma^0\partial_0\Psi(x)$$

$$\Psi(x) = \sum_{s=\pm 1/2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}2E_p}\left\{a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + b_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\right\}$$

$$H = \ldots = \int \frac{d^3p}{2E_p}E_p\sum_{s=\pm 1/2}\left(a_s^\dagger(\vec{p})a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p})b_s^\dagger(\vec{p})\right)$$

Normalordnung: $\quad :\left[a_s(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{q})\right]: \;=\; :\left[b_s(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{q})\right]: \;= 0$

$$:H: \;= \int \frac{d^3p}{2E_p}E_p\sum_{s=\pm 1/2}\left(a_s^\dagger(\vec{p})a_s(\vec{p}) - b_s^\dagger(\vec{p})b_s(\vec{p})\right)$$

Energie der Fock-Zustände, die von $b_s^\dagger$ erzeugt werden ist beliebig klein!

Quantisierung des Dirac-Felds

Ausweg: fordere **Anti**-Vertauschungsrelationen:

$$\left\{a_r(\vec{p}), a_s^\dagger(\vec{q})\right\} = 2E_p\delta_{rs}\delta(\vec{p}-\vec{q})$$

$$\left\{b_r(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{q})\right\} = 2E_p\delta_{rs}\delta(\vec{p}-\vec{q})$$ (alle übrigen Antikommutatoren = 0)

Nur falls Erzeuger/Vernichter Anti-Vertauschungsregeln erfüllen ist die Energie von unten beschränkt:

Normalordnung: $$:\left\{a_s(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{q})\right\}: \,=\, :\left\{b_s(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{q})\right\}: \,=0$$

$$\Rightarrow \quad :H: = \int \frac{d^3p}{2E_p} E_p \sum_{s=\pm1/2} \left(a_s^\dagger(\vec{p})a_s(\vec{p}) + b_s^\dagger(\vec{p})b_s(\vec{p})\right) \quad > 0$$

Das Pauli-Prinzip folgt aus der Quantisierung der Theorie!

Quantisierung des Dirac-Felds

Forderung nach Anti-Vertauschungsrelationen konsistent mit **Mikrokausalität**:

$$\left\{\Psi(x),\overline{\Psi}(y)\right\}\Big|_{x^0=y^0}=\gamma^0\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

(*equal time anti commutator*)

Anti-Kommutator zu beliebigen Zeiten:

$$\left\{\Psi(x),\overline{\Psi}(y)\right\}=\left(i\gamma^\mu\partial_\mu^x+m\right)\int\frac{d^3p}{2E_p}\left(\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{ip\cdot(x-y)}\right)=\left(i\gamma^\mu\partial_\mu^x+m\right)i\Delta(x-y;m)$$

Propagator und zeitgeordnetes Produkt:

$$T\,\Psi(x)\overline{\Psi}(y):=\theta(x^0-y^0)\Psi(x)\overline{\Psi}(y)-\theta(y^0-x^0)\overline{\Psi}(y)\Psi(x)$$

$$S_F(x-y)\equiv\left\langle 0\left|T\,\Psi(x)\overline{\Psi}(y)\right|0\right\rangle=i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{(\gamma^\mu p_\mu+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}$$