Bonus Übungen
Theoretische Physik 2: SS2016
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen
Hauptassistent: Leonardo de la Cruz
(130 Punkte)

12.07.2016
Bis 20.07.2016 am 14:00

Aufgabe 1 (35 Bonuspunkte): Eine dielektrische Zylinder in einem homogenen elektrischen Feld

(a) (12 Punkte)
Zeige mit der Separation der Variablen in Zylinderkoordinaten, dass die Laplace-Gleichung für eine zylindrische Symmetrie (d.h. es liegt keine Abhängigkeit von z vor) die Lösung

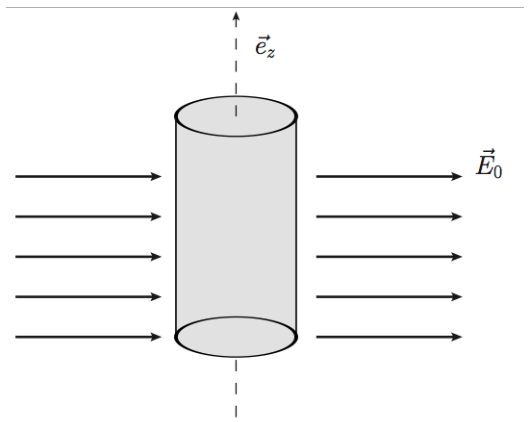
$$\Phi(r,\phi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n r^n + B_n r^{-n}\right] \left[C_n \sin(n\phi) + D_n \cos(n\phi)\right]$$

hat.

Betrachte einen (unendlich) langen Zylinder mit Radius R und Dielektrizitätskonstante $\varepsilon > 1$, der in ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0$ gebracht wird ($\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{e}_z$).

(b) (6 Punkte)
Gibt die Randbedingungen für das Potential Φ an.

(c) (12 Punkte)
Berechne das Potential innerhalb und außerhalb des Zylinders.
(d) (5 Punkte)
Berechne das elektrische Feld innerhalb und außerhalb des Zylinders.



Aufgabe 2 (30 Bonuspunkte): Das elektrische und magnetische Feld im Laborsystem

Ein (unendlich) langer, gerader Draht mit vernachlässigbar kleiner Querschnittsfläche ist im Bezugssystem S' in Ruhe und hat eine Linienladungsdichte λ. Das System S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ gegenüber dem Laborsystem S.
(a) (13 Punkte)
Berechne das elektrische und magnetische Feld im Ruhesystem, S', des Drahtes in Zylinderkoordinaten und finde die Felder im Laborsystem S.
(b) (7 Punkte)
Gibt die Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\mathbf{j}$ im Ruhesystem S' an und berechne diese für das System S.
(c) (10 Punkte)
Benutze die Strom- und Ladungsdichte im Laborsystem S um das elektrische und magnetische Feld in Laborsystem S zu berechnen. Vergleiche das Ergebnis mit Teil **a**).

Aufgabe 3 (30 Punkte): Der zylindrische Hohlraumresonator

Gegeben sei ein Hohlraumresonator bestehend aus einem Zylinder mit Radius R_a und Höhe h und zwei Deckflächen bei $z = 0$ und $z = h$, der von metallischen Wänden umschlossen ist.

(a) (10 Punkte)
Separiere die Wellengleichnung

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

für die z-Komponente mit $E_z = R(r)Q(\phi)Z(z)e^{-i\omega t}$.

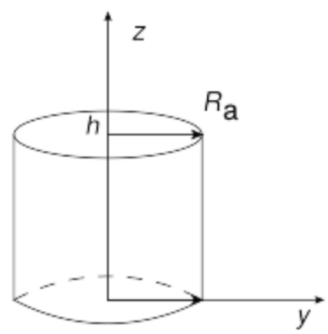
(b) (10 Punkte)
Gib die speziellen Lösungen für $Q(\phi)$, $Z(z)$ und $R(r)$ in dem Zylinderresonator an (für $B_z = 0$). *Hinweis:* Verwende, dass die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - k^2)y = 0$$

die Besselfunktionen $J_k(x)$ als Lösung hat.

(c) (10 Punkte)
Gib die Resonanzfrequenzen ω_{lmn} an. Berechne für $R_a = h$ die 3 langsamsten Resonanzmoden

Hinweis: die q-te Nullstelle der p-ten Besselfunktion x_{pq} ist: $x_{01} = 2.405,\ x_{02} = 5.520,\ x_{11} = 3.832,\ x_{21} = 5.136, ...$



Aufgabe 4 (35 Bonuspunkte): Strahlung von Linear-Antennen

(a) (15 Punkte)

Das Vektorpotential einer $\frac{\lambda}{2}$-Antenne, welche symmetrisch längs der z-Achse angeordnet ist, lautet

$$\mathbf{A} = \frac{I_0}{2\pi\omega|\mathbf{x}|} \cos\left[\omega\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right)\right] \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \mathbf{e}_z. \tag{1}$$

Das zugehörige Magnetfeld $\mathbf{B}$ lässt sich mit Hilfe der Gleichung

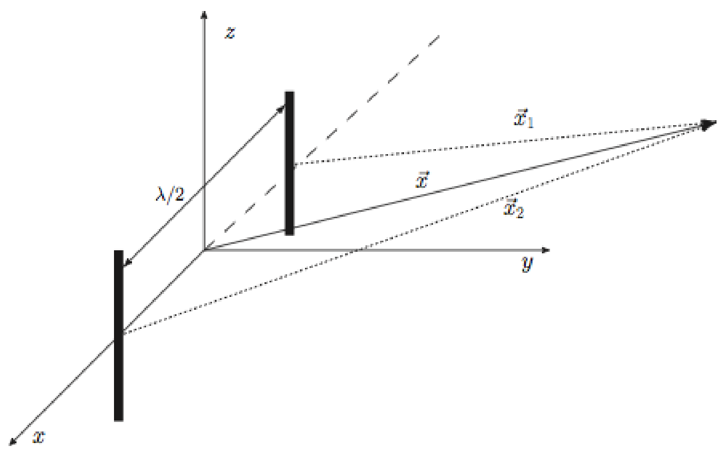
$$\mathbf{B} \simeq -\frac{1}{c}\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2}$$

berechnen. Bestimme die zeitlich gemittelte Stahlungsleistung pro Raumwinkel der Antenne $< \frac{dP}{d\Omega} >$.

Betrachte zwei parallele $\frac{\lambda}{2}$-Antennen, welche beide symmetrisch entlang der z-Achse angeordnet sind und bei $x = \frac{\lambda}{4}$ bzw. $x = -\frac{\lambda}{4}$ (und bei $y = 0$) liegen.

(b) (20 Punkte)

Berechne die zeitlich gemittelte Stahlungsleistung pro Raumwinkel für die Fälle, dass beide Antennen in Phase sind und dass die Oszillation der Antennen um 180° verschoben ist.
Benutze dazu für jede der beiden Antennen für das Vektorpotential $\mathbf{A}$ eine



Lösung der Form wie in Gl. (1) angegeben. Drücke die Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{e}_x$ aus und berechne $|\mathbf{x}_1|$ und $|\mathbf{x}_2|$, wobei Terme der Ordnung größer als λ vernachlässigt werden können.
Berechne das totale Feld $\mathbf{A}$ und betrachte nur Terme der Ordnung $\frac{1}{|\mathbf{x}|}$ in $\mathbf{A}$.

Hinweis: Für diese Ordnung können die Winkel beider Antennen, θ_1 und θ_2, durch θ genähert werden.

Formelsammlung:

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)\\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\nabla\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
\nabla^2\Phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\partial\Phi}{\partial^2 z} \\
\nabla\times\mathbf{V} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

Umrechnung zwischen Heaviside-Lorentz und SI-Einheiten:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{HL} &\longleftrightarrow \sqrt{\epsilon_0}\mathbf{E}_{SI} \\
\mathbf{B}_{HL} &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\mathbf{E}_{SI} \\
q_{HL} &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}q_{SI} \\
\mathbf{j}_{HL} &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\mathbf{j}_{SI} \\
\mathbf{m}_{HL} &\longleftrightarrow \sqrt{\mu_0}\mathbf{m}_{SI}
\end{aligned}
$$