13. Übungsblatt
Theoretische Physik 6: WS2014/15
Dozent: Prof. M. Vanderhaeghen

02.02.2015

Aufgabe 1. (40 Punkte): Hyperfeinstruktur in Wasserstoff - 21cm Linie

Die Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem magnetischen Feld lässt sich durch

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot \hat{\vec{B}},$$

beschreiben, wobei $\vec{\mu}$ das magnetische Moment

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \frac{\hbar}{c} \vec{\sigma}$$

des Elektrons ist.

(a) (10 Punkte) Drücke $\hat{H}_{\text{int}}$ durch die Normalmoden-Entwicklung aus.
Hinweis: Benutze

$$\hat{\vec{A}} = \sum_{\vec{k},\sigma} N_k \vec{\epsilon}_{\vec{k},\sigma} \left\{ \hat{a}_{\vec{k},\sigma} e^{i\vec{k}\vec{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\sigma} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right\},$$

wobei $\vec{\epsilon}_{\vec{k},\sigma}$ der Polarisationsvektor des Photons ist.

(b) (30 Punkte) Der $1S$-Zustand mit $f = 1$ hat eine etwas höhere Energie wie der $1S$-Zustand mit $f = 0$. Beim Übergang zwischen dem Anfangszustand

$$|\psi_i\rangle = |1S\rangle|\uparrow\rangle_e|\uparrow\rangle_p,$$

und dem Endzustand

$$|\psi_f\rangle = |1S\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\rangle_e|\downarrow\rangle_p - |\downarrow\rangle_e|\uparrow\rangle_p\right\},$$

wird ein Photon mit $\lambda \approx 21$cm freigesetzt. Berechne die Lebensdauer des Übergangs und gib einen Zahlenwert an.
Hinweis: Berechne das Matrixelement

$$\langle f|\hat{H}_{\text{int}}|i\rangle$$

in Dipol-Näherung und wende Fermi's Goldene Regel an. Die erwartete Lösung ist:

$$\frac{1}{\tau_{i\to f}} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{1}{3}\frac{\hbar}{m^2c^2}k_0^2,$$

mit $k_0 = 2\pi/\lambda$.

Aufgabe 2 (45 Punkte): Mott-Streuung

Betrachtet wird unpolarisierte Elektronenstreuung in Quantenelektrodynamik mit einem externen Coulomb-Potentialfeld $A^\mu = (-\frac{Ze}{4\pi r}, 0, 0, 0)$. Die Elektronen werden als massive Diracteilchen mit Masse m angesehen.

(a) (15 Punkte) Gib einen Ausdruck des differentiellen Wirkungsquerschnitts im Laborsystem in Abhängigkeit vom Matrixelement an. Im Falle eines statischen Potentials ist die Energie des Elektrons im Anfangs- und Endzustand gleich, wohingegen sich die Richtung der Dreierimpulse der Elektronen ändern kann. Für eine Potentialstreuung müssen nur der Phasenraum und die Normierungsfaktoren des Elektrons betrachtet werden.

(b) (5 Punkte) Integriere über die Elektronenenergie des Endzustands.

(c) (20 Punkte) Das Matrixelement kann man aus dem Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_1 = -eA^\mu j_\mu$$

erhalten. Im Fourier-Raum ist das Coulombpotential durch

$$V(q) = -\int \frac{Ze}{4\pi r} e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r = -\frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$$

gegeben. Berechne das quadrierte Matrixelement für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt.

(d) (5 Punkte) Bestimme den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Laborsystem in Abhängigkeit der Variablen des einlaufenden Elektrons (Energie w und relativistische Geschwindigkeit β) und des Streuwinkels. Berechne den nicht-relativistischen Limes des Wirkungsquerschnitts (dieser Limes wird als Rutherford-Streuung bezeichnet).

Aufgabe 3 (15 Punkte):

Betrachtet wird der Lagrangian eines reellen, skalaren Feldes ϕ in $1+1$ Dimensionen:

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\,\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - v^2\right)^2 ,$$

(a) (5 Punkte) Finden den zugehörigen Hamiltonian und die Bedingung an die klassischen Feldkonfigurationen $\phi_0(x)$, welche die Energie minimieren. *Hinweis:* Der konjugierte Impuls π eines Felder ϕ ist durch $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ gegeben und der Hamiltonian durch $H = \int dx \left(\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}\right)$.

(b) (5 Punkte) Finde die Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen) des Feldes ϕ.

(c) (5 Punkte) Die statische Lösung, welche zwischen zwei Vakuumzuständen interpoliert,

$$\phi_0(x) \;=\; v \times \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}vx\right) ,$$

bezeichnet man als „kink"-Lösung. Zeige, dass diese „kink"-Lösung tatsächlich die Lögung der Bewegungsgleichung ist.