Einführung in die Gitterfeldtheorie

Prof. Dr. H. Wittig, Sommersemester 2017

Übungsblatt 2

4. Naive Diskretisierung der Yang-Mills-Wirkung
Betrachte das Transformationsgesetz eines nicht-Abelschen Eichpotentials im Kontinuum

$$A_\mu(x) \longrightarrow g(x)\,A_\mu(x)\,g^{-1}(x) + g(x)\,\partial_\mu g^{-1}(x), \quad g(x) \in \mathrm{SU(N)}, \quad x \in \mathbf{R}^4$$

sowie seine naive Diskretisierung:

$$A_\mu(x) \longrightarrow g(x)\,A_\mu(x)\,g^{-1}(x) + g(x)\,\nabla_\mu g^{-1}(x), \quad g(x) \in \mathrm{SU(N)}, \quad x \in \Lambda_E,$$

wobei ∇_μ die Vorwärtsableitung auf dem Gitter bezeichnet. Zeige dass das Transformationsgesetz im Kontinuum nicht durch die naive Gitterapproximation reproduziert wird [**Hinweis:** betrachte eine Eichtransformation $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ im Kontinuum und auf dem Gitter; vergleiche die Resultate].

5. Wilson Plaquette-Wirkung
Sei $A_\mu(x)$ ein gegebenes Eichpotential im Kontinuum (Eichgruppe SU(N)), welches die Linkvariable $U_\mu(x)$ durch

$$U_\mu(x) = \mathrm{e}^{aA_\mu(x)}, \quad A_\mu^\dagger(x) = -A_\mu(x), \quad A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)T^a$$

definiert. Benutze diese Definition um den folgenden Ausdruck für die Spur der Plaquette abzuleiten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,P_{\mu\nu}(x) \quad &\equiv \quad \mathrm{Tr}\left\{U_\mu(x)\,U_\nu(x+a\hat\mu)\,U_\mu^\dagger(x+a\hat\nu)\,U_\nu^\dagger(x)\right\} \\ &\overset{a\to 0}{=} \quad N + \frac{a^4}{2}\,\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\right) + O(a^5), \end{aligned}$$

wobei

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\nu A_\mu(x) + \left[A_\mu(x), A_\nu(x)\right]$$

der Feldtensor im Kontinuum für das gegebene Eichpotential $A_\mu(x)$ darstellt.

[**Hinweis:** schreibe $\mathrm{Tr}(P_{\mu\nu})$ als $\mathrm{Tr}(S \cdot T)$, mit

$$S = U_\nu^\dagger(x)\,U_\mu(x), \quad T = U_\nu(x+a\hat\mu)\,U_\mu^\dagger(x+a\hat\nu)$$

und wende die *Baker-Campbell-Hausdorff*-Formel

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\cdots}$$

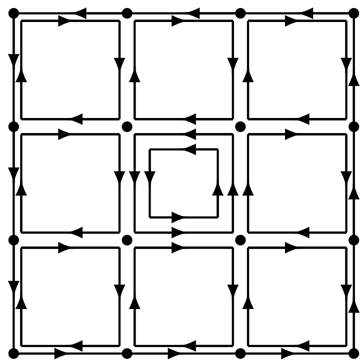
separat auf S, T an. Benutze Relationen der Art

$$A_\nu(x) = A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x) + O(a^2)$$

und entwickele das Produkt $S \cdot T$ in Potenzen von a vor Auswertung der Spur.]

6. Starkkopplungsentwicklung zur Ordnung β^2

Betrachte die Starkkopplungsentwicklung des Wilson loop $W(R,T)$ mit Fläche $R \times T$ für die Eichgruppe SU(3). Berechne den Beitrag zur Ordnung β^2 der durch den Graphen



gegeben ist. Addiere das Resultat mit dem Ergebnis zur Ordnung β und berechne den Ausdruck für die *string tension* σ, wobei

$$\langle W(R,T)\rangle = \mathrm{e}^{-V(R)T}, \quad V(R) \approx \sigma R$$

Hinweis: Benutze die bekannten Ausdrücke für einfache Gruppenintegrale für SU(3), insbesondere:

$$\int dU\, U_{ij}\, U_{kl}\, U_{mn} = \frac{1}{3!}\, \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}$$