Einführung in die Gitterfeldtheorie

Prof. Dr. H. Wittig, Sommersemester 2017

Übungsblatt 1

1. Gitterableitung

Benutze die Definitionen der Vorwärts- und Rückwärtsableitungen auf dem Gitter um zu zeigen dass

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = [\nabla^*_\mu, \nabla^*_\nu] = [\nabla_\mu, \nabla^*_\nu] = 0. \tag{1}$$

$$\nabla_\mu \{f(x)g(x)\} = \left\{\nabla_\mu f(x)\right\} g(x) + f(x) \left\{\nabla_\mu g(x)\right\} + a \left\{\nabla_\mu f(x)\right\} \left\{\nabla_\mu g(x)\right\} \tag{2}$$

(keine Summe über μ in Gl. (2)).

Die Funktionen f, g seien translationsinvariant in allen Raumzeit-Richtungen. Zeige dass

$$\sum_{x\in\Lambda_E} g(x) \left\{\nabla_\mu f(x)\right\} = -\sum_{x\in\Lambda_E} \left\{\nabla^*_\mu g(x)\right\} f(x)$$
$$\sum_{x\in\Lambda_E} g(x) \left\{\nabla^*_\mu f(x)\right\} = -\sum_{x\in\Lambda_E} \left\{\nabla_\mu g(x)\right\} f(x)$$

Benutze diese Ergebnisse um zu zeigen dass

$$\sum_{x\in\Lambda_E} g(x)\Delta f(x) = -\sum_{x\in\Lambda_E}\sum_{\mu=0}^{3} \left\{\nabla_\mu g(x)\right\}\left\{\nabla_\mu f(x)\right\} = -\sum_{x\in\Lambda_E}\sum_{\mu=0}^{3} \left\{\nabla^*_\mu g(x)\right\}\left\{\nabla^*_\mu f(x)\right\}$$

Hierbei ist

$$\Delta = \sum_{\mu=0}^{3} \nabla_\mu\nabla^*_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \nabla^*_\mu\nabla_\mu$$

der Ausdruck für den diskretisierten Laplace-Operator.

2. Verbesserte Ableitungen

Sei $f(x)$ eine Funktion einer reellen Variable x, und seien ∇, ∇^* die Gitterableitungen nach x, d.h.

$$\nabla f(x) = \tfrac{1}{a}\left(f(x+a) - f(x)\right), \qquad \nabla^* f(x) = \tfrac{1}{a}\left(f(x) - f(x-a)\right)$$

Zeige mit Hilfe der Taylorentwicklungen von $f(x+a)$ und $f(x-a)$ dass

$$\tfrac{1}{2}\left(\nabla + \nabla^*\right)\ f(x) = f'(x) + \mathrm{O}(a^2)$$
$$\left(\nabla\nabla^*\right)\ f(x) = f''(x) + \mathrm{O}(a^2)$$

wobei $f'(x)$ und $f''(x)$ die Ableitungen im Kontinuum darstellen.

Eine sog. "verbesserte" Diskretisierung kann durch Einbeziehung höherer Terme in der Taylorentwicklung erreicht werden. Zeige dass

$$\tfrac{1}{2}\left(\nabla + \nabla^*\right)\left(1 - \tfrac{1}{6}a^2\nabla^*\nabla\right) f(x) = f'(x) + \mathrm{O}(a^4)$$
$$\left(\nabla\nabla^*\right)\left(1 - \tfrac{1}{12}a^2\nabla^*\nabla\right) f(x) = f''(x) + \mathrm{O}(a^4)$$

3. Skalare Quantenelektrodynamik auf dem Gitter

Die Kopplung eines reellen Abelschen Eichfelds, $A_\mu = A_\mu^*$ und eines komplexen Skalarfelds ϕ wird als skalare QED bezeichnet. Im Kontinuum wird diese Theorie durch die Euklidische Wirkung

$$S_{\mathrm{E}}[A,\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4g_0^2} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \left[D_\mu\phi\right]^* \left[D_\mu\phi\right] + m_0^2\phi^*\phi \right\},$$

beschrieben, wobei g_0 and m_0 die nackte Kopplung und Masse bezeichnen. Der Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}$ und die kovariante Ableitung D_μ sind definiert über

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad D_\mu\phi = (\partial_\mu - iA_\mu)\phi.$$

(a) Verifiziere dass $S_{\mathrm{E}}[A,\phi]$ unter der Eichtransformation

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \qquad \phi(x) \to e^{i\Lambda(x)}\phi(x),$$

invariant ist, wobei $\Lambda(x)$ eine genügend glatte Eichfunktion ist.

(b) Die Theorie werde nun durch Einführung eines hyperkubischen Gitters Λ_E diskretisiert. Zeige, dass der diskretisierte Feldstärkentensor

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

eichinvariant ist (∇_μ bezeichnet die Vorwärtsableitung).

(c) Zeige dass die diskretisierte Ableitung

$$D_\mu\phi = (\nabla_\mu - iA_\mu)\phi$$

die Eichinvarianz verletzt.

(d) Definiere den Abelschen Paralleltransporter U_μ mit Hilfe des Eichpotentials $A_\mu(x)$ als

$$U_\mu(x) := e^{-iaA_\mu(x)}.$$

Leite das Transformationsgesetz für $U_\mu(x)$ her. Benutze, dass das Abelsche Eichpotential sich auf dem Gitter nach

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \nabla_\mu\Lambda(x),$$

transformiert.

(e) Benutze das Resultat aus (d) um eine diskretisierte Version der kovarianten Ableitung zu konstruieren, deren Transformationsgesetz

$$D_\mu\phi(x) \to e^{i\Lambda(x)}D_\mu\phi(x).$$

lautet.