Übungsblatt 2

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig   Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 08.05.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Unschärferelation*
   Gegeben ist das Wellenpaket

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{\psi}(k) e^{ikx}$$

   (a) (1 Punkt) Berechne $\psi(x)$ für eine Rechteckverteilung $\hat{\psi}(k)$:

$$\hat{\psi}(k) = \begin{cases} A, & k_0 - \Delta k < k < k_0 + \Delta k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   i. (2 Punkte) Berechne die mittlere quadratische Abweichung des Impulses $(\Delta k)^2$, gegeben durch

$$(\Delta k)^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2,$$
$$\langle k^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^n |\psi(k)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} dk\, |\psi(k)|^2}.$$

   Bestimme weiterhin A, sodass die Normierung $N = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, |\psi(k)|^2 = 1$.

   ii. (2 Punkte) Berechne die mittlere quadratische Abweichung des Ortes $(\Delta x)^2$ (analoge Definition zu (i)). Bestimme auch hier A, sodass $N = 1$.

   iii. (1 Punkt) Berechne das Produkt $(\Delta x)^2 \cdot (\Delta k)^2$ (Unschärferelation).

   (b) (1 Punkt) Berechne $\psi(x)$ für eine Gaußverteilung $\hat{\psi}(k)$:

$$\hat{\psi}(k) = \psi_0 e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2a^2}}$$

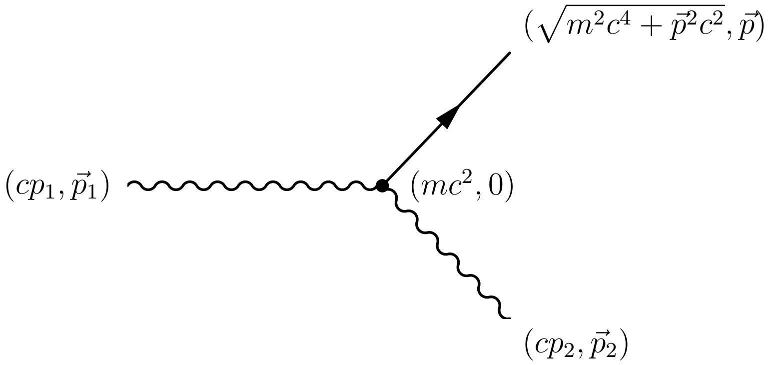
   i. (2 Punkte) Berechne die mittlere quadratische Abweichung des Impulses $(\Delta k)^2$. Bestimme weiterhin a, sodass $N = 1$.

ii. (2 Punkte) Berechne die mittlere quadratische Abweichung des Ortes $(\Delta x)^2$. Bestimme auch hier a, sodass $N = 1$.

iii. (1 Punkt) Berechne das Produkt $(\Delta x)^2 \cdot (\Delta k)^2$ (Unschärferelation).

2. (4 Punkte) *Compton-Streuung*

   Ein Photon wird elastisch an einem ruhenden Elektron gestreut.



   Berechne die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ des einlaufenden und auslaufenden Photons in Abhängigkeit des Streuwinkels $\theta = \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ und der Compton-Wellenlänge $\lambda_C = \frac{h}{mc}$.

3. *Wellengleichung*

   Ein Wellenpaket werde durch die Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

   beschrieben.

   (a) (1 Punkt) Zeige, dass $\Psi_1(x,t) = e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$ und $\Psi_2(x,t) = e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}$ Lösungen der Wellengleichung sind. Wie lauten die Dispersionsbeziehungen $\omega = \omega(k)$?

   (b) (1 Punkt) Berechne die Wahrscheinlichkeitsdichten ρ_1 und ρ_2 mit $\rho_i = |\Psi_i|^2$, sowie die Dichte ρ der Superposition $\Psi_1 + \Psi_2$ beider Wellen.

   (c) (1 Punkt) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Maximum der Dichte?

   (d) (1 Punkt) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Phase der Wellen Ψ_1 und Ψ_2?