# Übungsblatt 6

**zur Vorlesung**
**"Theorie III - Quantenmechanik"**
**im Sommersemester 2015**

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Felix Erben

**Abgabe: Freitag, 05.06.2015, 10:00,**
**im Foyer des Instituts für Kernphysik.**
**Bitte auch die benötigte Bearbeitungszeit auf dem Abgabezettel vermerken!**

1. *Gamma-Funktion*

   Die Gamma-Funktion hat die Integraldarstellung

   $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{\alpha-1}.$$

   (a) (2 Punkte) Berechne $\Gamma(1)$ und zeige $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Gib eine Interpretation für $\Gamma(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ an.

   (b) (2 Punkte) Zeige $\displaystyle\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}}$. Löse dann das Integral für $n = 0$ explizit und schließe auf den Wert von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

   (c) (2 Punkte) Zeige $\displaystyle\int_0^1 dx\, \ln^\alpha(x) = (-1)^\alpha \Gamma(\alpha+1), \quad -1 < \alpha < \infty.$

2. (4 Punkte) *Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten*

   Zeige, dass in Polarkoordinaten mit

   $$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

   der Drehimpulsoperator $L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = C\frac{\partial}{\partial\phi}$ lautet. Bestimme die Konstante $C$ sowie Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators $L_z$. Was folgt für die Eigenfunktionen und Eigenwerte aus der Forderung, dass $\psi(r,\theta,\phi) = \psi(r,\theta,\phi+2\pi)$ sein sollte?

   **Hinweis:** Beginne die Rechnung mit $\frac{\partial}{\partial\phi}\psi(x,y,z)$ und schreibe die Ableitung nach $\phi$ auf Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten um.

3. *Harmonischer Oszillator*

   (a) (4 Punkte) Das Potential des eindimensionalen harmonischen Oszillators im elektrischen Feld $E$ lautet

   $$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx,$$

   wobei $q$ die elektrische Ladung ist. Berechne die Eigenfunktionen und Energieeigenwerte.

   **Hinweis:** Bringe das Potential auf die Form eines harmonischen Oszillatorpotentials.

(b) Ein quantenmechanisches System hat den ungestörten Hamiltonoperator

$$H_0 = \hbar\omega \sum_{i=1}^{3} \left( a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right),$$

mit $a_i = \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega\hbar}}(P_i - i\mu\omega X_i)$, wobei $\vec{P}$ der Impuls und $\vec{X}$ der Ortsoperator ist. Gegeben ist auch $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$, $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$.

i. (3 Punkte) Schreibe die Energieeigenwerte des ungestörten Systems auf und gib die Entartung der ersten 3 Energieniveaus an.

ii. (3 Punkte) Zeige:

$$[H_0, a_i^\dagger] = \hbar\omega a_i^\dagger \,.$$

Zeige: ist $|\phi\rangle$ ein Eigenvektor von $H_0$ mit Energie $E$, so ist auch $|\phi'\rangle = a_i^\dagger |\phi\rangle$ ein Eigenvektor. Gib dessen Energie $E'$ an.