Übungsblatt 9

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig   Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 26.06.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.
Bitte auch die benötigte Bearbeitungszeit auf dem Abgabezettel vermerken!

1. *Kommutatoren*

   Berechne die folgenden Kommutatoren:

   (a) (1 Punkt) $[L_i, x_j]$

   (b) (1 Punkt) $[L_i, p_j]$

   (c) (1 Punkt) $[L_i, r]$, wobei $r^2 = \vec{x}^2$

   (d) (1 Punkt) $[\vec{L}^2, L_i]$

   (e) (1 Punkt) $[L_\pm, \sin\theta\cos\phi]$

2. *Kugelflächenfunktionen*

   Für Zentralpotentiale $V(\vec{r}) = V(r)$ sind die Kugelfächenfunktionen $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ Lösungen des winkelabhängigen Teils der Schrödingergleichung. Die Kugelfächenfunktionen sind wie folgt definiert:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \left(\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi} ,$$

$$\text{mit} \quad P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell .$$

   (a) (2 Punkte) Zeige, dass für die Parität der Kugelflächenfunktionen gilt:

$$\Pi Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi) ,$$

   wobei die Wirkung des Paritätsoperators gegeben ist durch

$$\Pi Y_{\ell m}(\theta, \phi) = Y_{\ell m}(\pi - \theta, \phi + \pi) .$$

   (b) (2 Punkte) Für Zustände mit $m = 0$ lassen sich die Kugelflächenfunktionen durch die Legendre-Polynome $P_\ell(\cos\theta) \equiv P_\ell^0(\cos\theta)$ ausdrücken:

$$Y_{\ell 0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta) .$$

   Berechne $Y_{\ell 0}$ für $0 \leq \ell \leq 2$.

   (c) (4 Punkte) Die Kugelflächenfunktionen mit $0 < m \leq \ell$ können dann mithilfe des Aufsteigeoperators L_+ erzeugt werden:

$$L_+ = L_x + iL_y = \hbar e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) .$$

Berechne mit Hilfe der Beziehung

$$L_+ Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \hbar\sqrt{\ell(\ell-1) - m(m+1)}\,Y_{\ell m+1}$$

und der Symmetrierelation

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)$$

die Kugelflächenfunktionen mit $0 < |m| \leq \ell$ für $0 < \ell \leq 2$.

(d) (2 Punkte) Skizziere den Realteil der in dieser Aufgabe berechneten Kugelflächenfunktionen als Funktion von θ und ϕ in Polardarstellung. Wähle als Projektionsebene die $x-z$-Ebene und die $x-y$-Ebene.

3. *Spinoperatoren*

Die beiden Spinzustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ ('spin up' und 'spin down') seien orthonormierte Eingenzustände eines Systems mit Spin $\frac{1}{2}$.

(a) (3 Punkte) Zeige, dass

$$\begin{aligned}
[S_i, S_j] &= i\epsilon_{ijk}\hbar S_k\,, \\
[S_i, S_j]_+ &= \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij} I\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)\,, \\
S_y &= i\frac{\hbar}{2}(-|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)\,, \\
S_z &= \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Die Zustände sind orthonormiert, $\langle\uparrow\,|\,\uparrow\rangle = \langle\downarrow\,|\,\downarrow\rangle = I$; $\langle\uparrow\,|\,\downarrow\rangle = \langle\downarrow\,|\,\uparrow\rangle = 0$. Weiterhin gilt für den Einheitsoperator $I = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$ (Vollständigkeitsrelation)

(b) (2 Punkte) Wie sehen die Operatoren S_x, S_y und S_z in der Matrix-Darstellung der 'ket'-Zustände $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aus?