

Übungsblatt 8
zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig

Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 19.06.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

Bitte auch die benötigte Bearbeitungszeit auf dem Abgabezettel vermerken!

1. *Teilchen in einem harmonischen Oszillator: Superpositionsprinzip*

Bei Zeit $t = 0$ befindet sich ein Teilchen in einem Potential $V(x) = \mu\omega^2 x^2/2$ mit der Wellenfunktion

$$\psi(x, 0) = A \sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \psi_n(x),$$

wobei $\psi_n(x)$ die normierten Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind, mit den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

- (a) (1 Punkt) Berechne die Normierungskonstante A .
- (b) (1 Punkt) Berechne $\psi(x, t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(x, 0)$ für $t > 0$.
- (c) (2 Punkte) Zeige, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ eine periodische Funktion ist und gib die längste Periode τ an.
- (d) (2 Punkte) Berechne den Erwartungswert der Energie bei $t = 0$.

2. *Paritätsoperator*

Gegeben sei ein bezüglich Raumspiegelung symmetrisches Potential $V(\vec{x}) = V(-\vec{x})$. Der Paritätsoperator Π sei über die Eigenschaften

$$\begin{aligned}\Pi\Psi(\vec{x}) &= \Psi(-\vec{x}) \\ \Pi^2 &= I\end{aligned}$$

definiert.

- (a) (2 Punkte) Berechne die Eigenwerte zu Π .
- (b) (2 Punkte) Zeige, dass Π mit dem Hamiltonoperator vertauscht.
- (c) (2 Punkte) Wie verhalten sich die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators unter der Paritätstransformation?

3. *Drehimpuls in Kugelkoordinaten*

Im folgenden seien die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) definiert durch:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

- (a) (3 Punkte) Drücke die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ durch Kugelkoordinaten aus.
- (b) (3 Punkte) Berechne damit $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ und den Kommutator $[L_+, L_-]$ in Kugelkoordinaten.
- (c) (2 Punkte) Zeige, dass $L^2 = L_+L_- - \hbar L_z + L_z^2$ und gib L^2 in Kugelkoordinaten an.