Übungsblatt 3

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 15.05.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

1. *Klein-Gordon-Gleichung*

   Leite aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ eine relativistische Version der Schrödingergleichung her. Benutze hierzu die aus der Vorlesung bekannten Entsprechungen

$$E \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \vec{p} \leftrightarrow -i\hbar\nabla$$

   (a) (3 Punkte) Stelle die Differentialgleichung auf und löse sie mit dem Ansatz einer ebenen Welle:

$$\Psi(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}$$

   (b) (2 Punkte) Leite die Kontinuitätsgleichung allgemein her und berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ für den Ansatz aus (a).
   Hinweis: Multipliziere die Gleichung von links mit Ψ^* und subtrahiere davon die komplex konjugierte Gleichung. Bringe dieses Ergebnis auf die Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0.$$

   (c) (1 Punkt) Warum kann man ρ nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren?

2. *Hermitesche Operatoren*

   Mit dem Skalarprodukt

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_1^*(x)\Psi_2(x)$$

   ist der zu $\mathcal{O}$ adjungierte Operator $\mathcal{O}^\dagger$ definiert durch

$$(\Psi, \mathcal{O}\Psi) \equiv (\mathcal{O}^\dagger\Psi, \Psi).$$

   $\mathcal{O}$ ist hermitesch (selbstadjungiert), falls $\mathcal{O} = \mathcal{O}^\dagger$. Prüfe, ob die folgenden Operatoren hermitesch sind:

(a) (2 Punkte) $\vec{x} \times \frac{\hbar}{i}\nabla$. Was ist die physikalische Interpretation dieses Operators?

(b) (1 Punkt) $\frac{\hbar}{i}\vec{A} \cdot \nabla$

(c) (1 Punkt) $\frac{\hbar}{i}\nabla \cdot \vec{A}$.

(d) (1 Punkt) $\frac{\hbar}{2i}\left(\vec{A} \cdot \nabla + \nabla \cdot \vec{A}\right)$

(e) (2 Punkte) $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$

(f) (1 Punkt) Der Hamiltonoperator $\hat{H}$.

3. *Wellenpakete*

Berechne (analog zu der Aufgabe von Übungsblatt 2) das Wellenpaket

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{\psi}(k) e^{ikx}$$

für eine Dreiecksverteilung im Impulsraum

$$\hat{\psi}(k) = \begin{cases} \frac{\psi_0}{2a}(k - k_0 + 2a) & , k_0 - 2a \leq k \leq k_0 \\ -\frac{\psi_0}{2a}(k - k_0 - 2a) & , k_0 \leq k \leq k_0 + 2a \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

(a) (1 Punkt) Berechne ψ_0, sodass $N = 1$.

(b) (3 Punkte) Berechne $\psi(x)$.

(c) (2 Punkte) Skizziere das Wellenpaket und berechne die Breite Δx