Übungsblatt 11

zur Vorlesung
"Theorie III - Quantenmechanik"
im Sommersemester 2015

Dozent: Univ.-Prof. Dr. Hartmut H. Wittig

Oberassistent: Felix Erben

Abgabe: Freitag, 10.07.2015, 10:00,
im Foyer des Instituts für Kernphysik.

Bitte auch die benötigte Bearbeitungszeit auf dem Abgabezettel vermerken!
Dies ist das letzte Übungsblatt der Vorlesung. Es gibt die üblichen 20 Punkte
plus 6 Bonuspunkte.

1. Spinprojektionen

Gegeben sei ein Elektron mit Spin $\frac{1}{2}$. In der üblichen Darstellung ist $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$ diagonal, die zugehörigen Eigenzustände mit Spinprojektionen $\pm\frac{\hbar}{2}$ seien $|+\rangle_z$ und $|-\rangle_z$.

- (a) (2 Punkte) Berechne in der z -Darstellung die beiden normierten Eigenzustände zu S_y ($|+\rangle_y$ und $|-\rangle_y$).
- (b) (2 Punkte) Schreibe in der selben Darstellung den Operator $C = e^{-i\alpha S_x/\hbar}$ auf die allgemeine Form $C = A \cdot I + \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$ um und drücke das Ergebnis durch eine 2×2 -Matrix aus.

Hinweis: Benutze die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

- (c) (2 Punkte) Berechne nun $|\phi\rangle = C|+\rangle_y$. Für welche Werte von α ergeben sich Eigenzustände zu S_z ? Welcher geometrischen Operation könnte C entsprechen?

2. Spin & Unschärferelation

Im folgenden werden wieder die S_z -Eigenzustände $|\uparrow\rangle = |+\rangle_z$ verwendet, d.h. $\langle S_z \rangle \equiv \langle \uparrow | S_z | \uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2}$.

- (a) (2 Punkte) Berechne $(\Delta S_i)^2 = \langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2$ für $i \in \{x, y, z\}$.
- (b) (1 Punkt) Prüfe die verallgemeinerte Unschärferelation

$$(\Delta S_x)^2 (\Delta S_y)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [S_x, S_y] \rangle|^2.$$

- (c) (1 Punkt) Berechne $(\Delta \vec{S}^2)^2$ und zeige, dass $\vec{S}^2$ mit $\vec{S}$ vertauscht.
- (d) (1 Punkt) Wie ändert sich das Ergebnis von (b), wenn für die Erwartungswerte der Eigenzustand $|+\rangle_x$ zum S_x -Operator verwendet wird?
- (e) (4 Punkte) Berechne nun die Unschärferelation aus (b) mit der Linearkombination $|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$, mit $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Die Rechnung führt auf folgende Ungleichung:

$$[1 - 4(\operatorname{Re}(\alpha^* \beta))^2] [1 - 4(\operatorname{Im}(\alpha^* \beta))^2] \geq (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2$$

Verwende anschließend den Ansatz $\alpha = \cos \theta e^{i\phi_1}$ und $\beta = \sin \theta e^{i\phi_2}$. Für welche Werte von θ und ϕ gilt das Gleichheitszeichen in der Unschärferelation? Wie sehen die entsprechenden Zustände $|\Psi\rangle$ aus?

Hinweis: Einige Ergebnisse von Blatt 9, Aufgabe 3 können hier verwendet werden. Wie auch dort sind die $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ über die Pauli-Matrizen σ_i definiert.

3. *Harmonischer Oszillator mit Störungsterm*

Wir betrachten nun wieder den harmonischen Oszillator in 3 Dimensionen (vgl. Übungsblatt 6, Aufgabe 3.(b)):

$$H_0 = \hbar\omega \sum_{i=1}^3 \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right),$$

mit $a_i = \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega\hbar}}(P_i - i\mu\omega X_i)$, wobei $\vec{P}$ der Impuls und $\vec{X}$ der Ortsoperator ist. Gegeben ist auch $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$, $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$.

- (a) (2 Punkte) Der Hamiltonoperator erhält nun einen kleinen Störungsterm der Form

$$\delta H = \frac{1}{2}\mu\omega^2\lambda xy,$$

mit $\lambda \ll 1$. Berechne zu erster Ordnung in der Störungstheorie die Energiekorrektur des Grundzustands.

- (b) (3 Punkte) Berechne zu zweiter Ordnung die Korrektur des Grundzustands.
Hinweis:

$$\delta_2 E_a = \sum_{b \neq a} \frac{|\langle \Psi_b | \delta H | \Psi_a \rangle|^2}{E_a - E_b} \quad (E_a \text{ nicht entartet}).$$

4. *Wasserstoffatom*

Der Grundzustand des Wasserstoffatoms ist gegeben durch

$$\Psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{2}{\sqrt{a_B^3}} e^{-r/a_B} Y_{00}(\theta, \phi).$$

- (a) (4 Bonuspunkte) Berechne die Erwartungswerte von r , r^2 , p_r und p_r^2 in diesem Zustand.

Hinweis: p_r ist gegeben durch

$$p_r = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r.$$

- (b) (2 Bonuspunkte) Berechne die Unschärfe für Δr und Δp_r und vergleiche mit der Unschärferelation.