

# *Complex-Mass Renormalization* in effektiver Feldtheorie

Diplomarbeit von

Sandro Gorini

Institut für Kernphysik

Johannes Gutenberg-Universität Mainz

März 2010, korrigierte Version (Mk2)  
(Originalabgabe: November 2009 (Mk1))



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quantenchromodynamik und chirale Störungstheorie</b>	<b>4</b>
2.1	Quantenchromodynamik . . . . .	4
2.1.1	Die Lagrangedichte der QCD . . . . .	5
2.1.2	Globale Symmetrien . . . . .	5
2.1.3	Erzeugendes Funktional . . . . .	8
2.2	Chirale Störungstheorie . . . . .	8
2.2.1	Mesonische $\chi$ PT-Lagrangedichte . . . . .	10
2.3	Resonanzen in der $\chi$ PT . . . . .	11
2.3.1	Lagrangedichte der Rhomesonen . . . . .	11
2.3.2	Lagrangedichte der Sigamesonen . . . . .	13
2.4	Lagrangedichte der Pionenstreuung . . . . .	14
2.5	Zählschema der $\chi$ PT mit resonanten Freiheitsgraden . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Renormierung</b>	<b>17</b>
3.1	Dimensionale Regularisierung . . . . .	18
3.2	<i>Complex-Mass Renormalization</i> . . . . .	19
3.3	Renormierungsverfahren . . . . .	20
3.4	Renormierung relevanter Diagrammstrukturen . . . . .	22
3.4.1	Propagatoren . . . . .	23
3.4.2	Vertizes . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Pionenstreuung</b>	<b>32</b>
4.1	S-Matrix und LSZ-Reduktion . . . . .	33
4.2	Streudiagramme . . . . .	34
4.3	Berechnung des Wirkungsquerschnitts . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>39</b>
5.1	Parameterregression . . . . .	39
5.2	Renormierungsbeiträge . . . . .	42
5.3	Sigamesonbeiträge . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Problem der Mehrfachzählung</b>	<b>45</b>

6.1	S-Kanal-Pionenschleifen . . . . .	45
6.2	Resonanzposition . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Notationen und Konventionen</b>	<b>51</b>
A.1	Allgemeine Definitionen . . . . .	51
A.2	Pauli- und Gell-Mann-Matrizen . . . . .	52
A.3	Skalare Integrale . . . . .	53
<b>B</b>	<b>Clebsch-Gordan-Zerlegung der Streuamplitude</b>	<b>55</b>
B.1	Zweipionenzustände . . . . .	55
B.2	Streuamplitude . . . . .	56
<b>C</b>	<b>Berechnung des Wirkungsquerschnitts</b>	<b>58</b>
C.1	Phasenraumvolumen . . . . .	58
C.2	Algorithmus . . . . .	59
<b>D</b>	<b>Feynmanregeln</b>	<b>61</b>
D.1	Propagatoren . . . . .	61
D.2	Reiner Pionenvertex . . . . .	62
D.3	Vertizes mit expliziten rho-mesonischen Freiheitsgraden . . . . .	62
D.4	Vertizes mit expliziten sigma-mesonischen Freiheitsgraden . . . . .	64
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>66</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>67</b>

# Kapitel 1

## Einführung

Die zwei fundamentalen Säulen des Gebäudes der modernen theoretischen Physik sind die allgemeine Relativitätstheorie einerseits und die relativistischen Quantenfeldtheorien andererseits. Während Erstere auf Einsteins geometrische Überlegungen zu Raum und Zeit zurückzuführen ist und sich ausschließlich mit gravitativen Effekten auf kosmologischen Skalen beschäftigt, beschreiben Letztere die drei übrigen bekannten elementaren Wechselwirkungen – die elektromagnetische sowie die schwache und starke Kernkraft. Diese Kräfte werden durch das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik zu einer vereinheitlichten  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Eichtheorie zusammengefasst, welche auf universellen Prinzipien wie der Quantentheorie, der speziellen Relativitätstheorie und der Clusterzerlegung basiert [Wei95]. Eichtheorien generieren durch ihre mathematische Struktur auf natürliche Weise Wechselwirkungen zwischen fermionischen Materiefeldern und bosonischen Austauschpartikeln, deren Eigenschaften eng mit den Symmetrien der jeweiligen zugrunde liegenden Theorie verknüpft sind.

Materie lässt sich in zwei Kategorien einteilen: Leptonen – zu denen das Elektron, Myon und Tau sowie deren Neutrinos und jeweilige Antiteilchen gehören – und 18 Quarks, die in sechs sogenannten *flavors* – *up*, *down*, *strange*, *charm*, *beauty* und *truth* – und jeweils drei Farben mit entsprechenden Antiteilchen auftreten [PRSZ09].

Die Arten von Wechselwirkungen, denen die Materiefelder unterworfen sind, klassifizieren sich nach den Austauschbosonen. Die  $SU(2) \times U(1)$ -Komponente des Standardmodells steht für die elektroschwache Wechselwirkung, deren Austauschpartikeln das masselose Photon sowie die massiven W- und Z-Bosonen sind. Ersteres koppelt an elektrische, die beiden verbleibenden an sogenannte schwache Ladungen [Ryd06; LP01; PS95]. Der für diese Arbeit schließlich interessante  $SU(3)$ -Baustein beschreibt im Rahmen der nicht-abelschen Quantenchromodynamik (QCD) die Wechselwirkungen Farbladung tragender Teilchen untereinander, übermittelt durch acht masselose Gluonen als Eichbosonen [GW73b; Wei73; FGML73]. In der Natur finden sich ausschließlich farbneutrale Teilchen, sogenannte Hadronen, welche durch Zusammenschluss eines Quark-Antiquark-Paares (Me-

sonen) oder dreier Quarks (Baryonen) entstehen. Dieses unter dem Begriff *confinement* [GW73a] bekannte Phänomen ist eines der größeren bislang ungelösten Probleme der theoretischen Physik und konnte noch nicht aus den fundamentalen Prinzipien der QCD abgeleitet werden (eines der mit einer Million Dollar dotierten Millenniumprobleme des Clay Mathematics Institute [JW; Dou]).

Die laufende Kopplung der Quantenchromodynamik (*running coupling constant*) lässt wegen der asymptotischen Freiheit nur im Bereich großer Energien störungstheoretische Berechnungsmethoden zu [GW73a; GW73b; Pol73]. Im für uns relevanten Bereich kleiner Energien, unterhalb der 1 GeV-Grenze, versagen diese jedoch, da keine entsprechenden asymptotischen Reihenentwicklungen existieren. Eine Möglichkeit, jene Eigenart zu umgehen, ist die Verwendung effektiver Feldtheorien – einer Art Abstraktion fundamentalerer Theorien –, wodurch sich die Dynamik eines Problems auf effektive Freiheitsgrade einschränken und somit vereinfachen lässt. Eine effektive Feldtheorie der Quantenchromodynamik ist die chirale Störungstheorie (*chiral perturbation theory*,  $\chi$ PT) [Wei79; GL84; GL85], die anstelle von Quarks und Gluonen Hadronen als effektive Bausteine ansieht. Das Fehlen entarteter Teilchenmultipletts diametraler Parität im Hadronenspektrum legt die Schlussfolgerung nahe, der Grundzustand breche die volle Symmetrie der QCD, wodurch die Existenz eines Satzes masseloser Goldstonebosonen [Gol61] – der Pionen – impliziert wird, die aufgrund ihrer Symmetrieeigenschaften als ebenjene effektive Freiheitsgrade der chiralen Störungstheorie verwendet werden.

Konstruktionsbedingt besteht eine effektive Lagrangedichte aus einer unendlichen Anzahl an Termen, da diese die allgemeinste, mit den Symmetrien der Theorie vereinbare, Lagrangedichte darstellen soll [Wei79]. Jeder einzelne Term wird von einer Niederenergiekopplungskonstante (*low energy coupling constant*, LEC) begleitet, so dass es für praktische Rechnungen essentiell ist, ein Ordnungsschema – beispielsweise das Weinberg'sche *power counting* [Wei79] – zu entwickeln, das die möglichen Terme ihrer Relevanz nach klassifiziert, um mit einem endlichen Teil der unendlichen Lagrangedichte auszukommen. Die Zahlenwerte der LEC sollten prinzipiell aus der QCD abzuleiten sein; da diese bislang jedoch nicht gelöst ist, muss man sich darauf beschränken, experimentelle Daten zur Parameterregression zu verwenden. Eine Alternative hierzu stellt die Gitter-QCD dar [Cre90; MM97; Smi02; Rot05], welche durch eine Diskretisierung der Raumzeit numerische Approximationen der LEC liefern kann [Nec07], im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet werden soll.

Verwendet man die  $\chi$ PT zur Berechnung physikalischer Observablen, so sind diese wegen der analytischen Struktur der Theorie a priori meist unendlich und damit bezüglich ihrer Vorhersagekraft wertlos. Es existieren jedoch konsistente Methoden, diese Unendlichkeiten durch Parameterredefinitionen zu absorbieren und daher in Observablen nicht manifest beitragen zu lassen. Zusammengefasst

---

unter dem Begriff Renormierung sind diese Verfahren für eine Quantenfeldtheorie unabdingbar, da nur durch sie die Möglichkeit besteht, Theorie und Experiment zu vergleichen.

Die Konvergenzreichweite der  $\chi$ PT ist nach oben hin durch die Masse der niedrigsten, nicht eingebauten Resonanz limitiert. Durch explizite Berücksichtigung der Rho- und Sigmamesonen sollte es möglich sein, den Gültigkeitsbereich der Theorie bis in eine Region von etwa 1 GeV zu vergrößern. Da es sich bei diesen beiden Mesonen um bezüglich der starken Kraft instabile Teilchen handelt, die jeweils primär in zwei Pionen zerfallen, sollte das *complex-mass renormalization* Schema (CMR Schema) [DD06; DDRW99; DDRW05] verwendet werden, um der komplexen Masse zerfallender Teilchen Rechnung zu tragen.

In der vorliegenden Arbeit wird die CMR in der chiralen Störungstheorie mit expliziten (vektor-)mesonischen Freiheitsgraden anhand der Pionenstreuung analysiert. Kapitel 2 beginnt mit einer kurzen Einführung in die Quantenchromodynamik und die relevanten Symmetriebetrachtungen unter besonderer Berücksichtigung der spontanen Symmetriebrechung des QCD-Grundzustandes, gefolgt von einigen Anmerkungen zur Konstruktion der chiralen Störungstheorie sowie der Ableitung relevanter Lagrangedichten. Kapitel 3 beschäftigt sich ausführlich mit den Einzelheiten der Renormierung, sowohl unter dem Gesichtspunkt der Unitarität der Theorie als auch der expliziten mathematischen Renormierungsmethoden (BPHZ und Gegenterm). In Kapitel 4 werden die Grundlagen der Teilchenstreuung dargelegt und sämtliche für die Pionenstreuung in Frage kommenden Diagramme aufgelistet. Daran anschließend werden in Kapitel 5 die erzielten Ergebnisse präsentiert und in Kapitel 6 das durch den Einbau der Resonanzen eventuell auftretende Problem der Mehrfachzählung (*double counting*) behandelt. Ein Ausblick auf mögliche weitere Analysen schließt sich in der Zusammenfassung in Kapitel 7 an.

# Kapitel 2

## Quantenchromodynamik und chirale Störungstheorie

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundprinzipien der Quantenchromodynamik sowie ihrer niederenergetischen effektiven Feldtheorie, der chiralen Störungstheorie, erläutert. Die Darstellungen der Abschnitte 2.1 und 2.2 orientieren sich an [Sch03].

### 2.1 Quantenchromodynamik

Die fundamentale Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik, eine nicht-abelsche oder Yang-Mills-Theorie, welche die Interaktion von Materiefeldern untereinander, vermittelt durch masselose Eichbosonen, beschreibt [GW73b; Wei73; FGML73]. Die fermionischen Materiefelder sind 18 Quarks, die in sechs *flavors* auftreten und jeweils neben Freiheitsgraden wie Ladung oder Spin einen zusätzlichen, intrinsischen aufweisen, der der stark wechselwirkenden Materie vorbehalten ist – die Farbe (*color*). Nach aufsteigender Masse sortiert lauten die sechs *flavors*

Masse in MeV	<i>up</i> 1.5–3.3	<i>down</i> 3.5–6.0	<i>strange</i> $104^{+26}_{-34}$
Masse in GeV	<i>charm</i> $1.27^{+0.07}_{-0.11}$	<i>beauty</i> $4.20^{+0.17}_{-0.07}$	<i>truth</i> $171.2 \pm 2.1$

[A+08]; die drei Farben werden mit rot, grün und blau bezeichnet. Die Eichbosonen der QCD sind acht Gluonen, die durch eine lokale *color*-SU(3) beschrieben werden.



### 2.1.1 Die Lagrangedichte der QCD

Werden die drei Dirac-Spinoren eines *flavors*  $f$  in der Form

$$\mathcal{Q}_f := \left( \mathcal{Q}_f^{\text{rot}}, \mathcal{Q}_f^{\text{grün}}, \mathcal{Q}_f^{\text{blau}} \right)^T$$

zu einem Vektor zusammengefasst, so lautet die Poincaré- und lokal eichinvariante Lagrangedichte der QCD [LP01; PS95; MP78; Alt82; LP01; PS95]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=\left\{ \begin{smallmatrix} u,d,s, \\ c,b,t \end{smallmatrix} \right\}} \bar{\mathcal{Q}}_f (i\gamma^\mu D_\mu - M_f) \mathcal{Q}_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a,\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Lokale Eichinvarianz wird durch die kovariante Ableitung  $D_\mu \mathcal{Q}_f$  gewährleistet, welche die acht Gluonenfelder  $\mathcal{A}_\mu^a$  entsprechend den acht Generatoren einer  $SU(3)$  in der Form

$$D_\mu \mathcal{Q}_f = \left( \partial_\mu - ig_s \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} \mathcal{A}_\mu^a \right) \mathcal{Q}_f$$

eingeführt; die  $\lambda^a$  sind hierbei die acht Gell-Mann-Matrizen (vgl. Anhang A.1),  $g_s$  die starke Kopplungskonstante.  $\mathcal{G}$  sind Gluonen-Feldstärketensoren, definiert gemäß

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a - g_s f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c,$$

mit den antisymmetrischen  $SU(3)$ -Strukturkonstanten  $f^{abc}$ . Der in  $\mathcal{G}$  quadratische, kinetische Term der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  lässt eine Eichbosonenselbstwechselwirkung zu, die eines der Hauptcharakteristika nicht-abelscher Eichtheorien ist.

### 2.1.2 Globale Symmetrien

In der oben aufgeführten Quarkmassentabelle fällt auf, dass diese ein mit großen Lücken versehenes Parameterspektrum umfasst. Bezogen auf eine typische hadronische Referenzskala von  $\Lambda = 1 \text{ GeV}$  sind die ersten Quarks – *up* und *down* – sehr leicht, die übrigen vier jedoch relativ schwer;

$$M_u, M_d \ll M_s \ll 1 \text{ GeV} < M_c, M_b \ll M_t.$$

Es kann daher davon ausgegangen werden, dass im niederenergetischen Bereich der QCD ausschließlich Erstere eine signifikante Rolle spielen, die Beiträge der anderen vier jedoch in Niederenergiekonstanten zu absorbieren sind. Darüber hinaus ist festzustellen, dass die Summe der Stromquarkmassen der leichteren Hadronen, beispielsweise des Rhomesons oder Nukleons, sehr viel kleiner ist als die beobachtete Gesamtmasse. Es bietet sich daher an, die QCD-Lagrangedichte im sogenannten

chiralen Grenzfall ( $\chi L$ ) – im Falle verschwindender Quarkmassen – zu betrachten, um eine nicht unerhebliche Vereinfachung der Gleichungsstruktur zu erzielen:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\chi L} = \sum_{f=u,d} i \bar{Q}_f \gamma^\mu D_\mu Q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a,\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Die so modifizierte Lagrangedichte weist eine sehr fundamentale Symmetrie auf. Definiert man zwei Projektionsoperatoren,  $P^L$  und  $P^R$ , welche die links- und rechts-händigen Helizitäten der Quarkfelder herausprojizieren, und führt darüber hinaus in Gleichung (2.2) die Ersetzung

$$Q_f \rightarrow \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} + \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) Q_f = (P^L + P^R) Q_f = Q_f^L + Q_f^R \quad (2.3)$$

durch, so zerfällt  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\chi L}$  in zwei sich nicht mischende links- und rechtshändige Komponenten

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\chi L} = \sum_{f=u,d} i \left( \bar{Q}_f^L \gamma^\mu D_\mu Q_f^L + \bar{Q}_f^R \gamma^\mu D_\mu Q_f^R \right) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a,\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Da die kovariante Ableitung *flavor*-unabhängig ist, ergibt sich – mit den Paulimatrizen  $\tau^j$  – eine globale  $U(2)_L \times U(2)_R$ -Invarianz bezüglich der Quarkfeldtransformationen

$$Q_f^{L|R} \rightarrow U_{ff'}^{L|R} Q_{f'}^{L|R} = \exp \left( -i \sum_{j=1}^3 \frac{\tau_{ff'}^j}{2} \theta_j^{L|R} - i \theta^{L|R} \mathbb{1}_{ff'} \right) Q_{f'}^{L|R}. \quad (2.5)$$

Verwendet man das Noether-Theorem [Noe18] sowie die Methode von Gell-Mann und Levy [GML60], so finden sich  $3 + 3 + 1 + 1 = 8$  erhaltene Ströme,  $L_j^\mu$ ,  $R_j^\mu$ ,  $L^\mu$  und  $R^\mu$ , die in den Linearkombinationen

$$\begin{aligned} V_j^\mu &= R_j^\mu + L_j^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu \frac{\tau_j}{2} Q, & A_j^\mu &= R_j^\mu - L_j^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_j}{2} Q, \\ V^\mu &= R^\mu + L^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu Q, & A^\mu &= R^\mu - L^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu \gamma_5 Q, \end{aligned}$$

d.h. in (Triplet- und Singulett-) Vektor- und Axialvektorströmen, zusammengefasst werden können.  $Q$  entspricht hierbei dem zweikomponentigen Isospinor  $Q = (Q_u, Q_d)^T$ . Die globale  $U(2)_L \times U(2)_R$  zerfällt in eine  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ -Symmetrie, wobei die  $U(1)_V$  der Baryonenzahlerhaltung entspricht. Die  $U(1)_A$  überlebt durch Fluktuationen im Gluonenhintergrund eine Quantisierung nicht und erzeugt eine hier nicht weiter relevante Anomalie [BJ69; Adl69; AB69]; die verbleibende  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  ist die chirale Symmetriegruppe der QCD für zwei masselose Quarks.

Die erwähnten erhaltenen Ströme  $V_j^\mu$  und  $A_j^\mu$  implizieren Ladungsoperatoren  $Q_{V_j}$  und  $Q_{A_j}$ , die mit dem Hamiltonoperator im chiralen Grenzfall kommutieren und daher die Existenz von degenerierten Zuständen diametraler Parität im Hadronenspektrum nahe legen. Diese Zustände sollten sich in Multipletts entsprechend der Dimensionalität irreduzibler Darstellungen der chiralen Symmetriegruppe anordnen. Empirisch beobachtet man jedoch keine sogenannte Paritätsverdoppelung, daher kann davon ausgegangen werden, dass es in der QCD zu einem spontanen Symmetriebruch kommt, der Grundzustand daher nicht mehr invariant unter der vollständigen chiralen Symmetriegruppe ist. Dem Coleman-Theorem zufolge [Col66] bestimmt die Symmetrie des Grundzustandes die Symmetrie des Spektrums und umgekehrt sollten sich aus dem Spektrum Informationen über den Grundzustand ableiten lassen. Sei  $n_H$  die Anzahl an Generatoren der Grundzustandssymmetrie und  $n_G$  die Zahl der Generatoren der kompletten Symmetriegruppe des Hamiltonoperators (also sechs für die  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ), so folgt aus dem Goldstone-Theorem [Gol61; GSW62] die Existenz von  $n_G - n_H$  masselosen Goldstonebosonen. Da sich im Teilchenspektrum drei Pionen finden, die sehr viel leichter sind als sämtliche übrigen nur aus *up*- und *down*-Quarks zusammengesetzten Hadronen, identifiziert man dieses Triplet mit den Goldstonebosonen einer spontan zur  $SU(2)_V$  gebrochenen Grundzustandssymmetrie der Quantenchromodynamik.

Ein zusätzlicher expliziter Symmetriebruch erklärt die sehr kleine jedoch nicht vollständig verschwindende Pionenmasse. Betrachtet man die QCD-Lagrangedichte aus Gleichung (2.1) im physikalischen, nicht im chiralen, Grenzfall, so lässt sich der Massenterm entsprechend

$$\mathcal{L}_{\text{SB}} = - \sum_{f=u,d} \bar{Q}_f M_f Q_f = -\bar{Q} \mathcal{M} Q = -\bar{Q}^R \mathcal{M} Q^L - \bar{Q}^L \mathcal{M}^\dagger Q^R \quad (2.6)$$

zerlegen, wobei  $\mathcal{M}$  die Zwei-*flavor*-Massenmatrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_d \end{pmatrix}, \quad M_u \neq M_d,$$

bezeichnet. Dieser Term bricht offensichtlich die chirale Symmetrie, da eine Mischung der Links- und Rechtsfelder auftritt, deren Stärke durch die Größe der Quarkmassen bestimmt wird. Die oben definierten Ströme sind, bis auf den Vektorstrom  $V^\mu$ , nicht mehr erhalten und entwickeln die expliziten Divergenzen

$$\partial_\mu V_j^\mu = i\bar{Q} \left[ \mathcal{M}, \frac{\tau_j}{2} \right] Q \quad \text{und} \quad \partial_\mu A_j^\mu = i\bar{Q} \left\{ \mathcal{M}, \frac{\tau_j}{2} \right\} \gamma_5 Q.$$

Der Axialvektorstrom  $A^\mu$  wird wegen der Anomalie ignoriert.

### 2.1.3 Erzeugendes Funktional

Für quantenfeldtheoretische Rechnungen sind Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Operatoren von größtem Interesse, da diese direkt mit der S-Matrix und daher wiederum mit physikalischen Observablen verknüpft sind. Durch Symmetriebetrachtungen ist es möglich, Bedingungen an die Struktur dieser Green'schen Funktionen zu stellen oder Relationen zwischen ihnen abzuleiten, sogenannte Ward-Identitäten (für die QED beispielsweise in [War50] zu finden). Eine elegante Methode, sämtliche Ward-Identitäten aus einem Ausdruck zu extrahieren, ist die Einführung externer Felder [GL84], die die Lagrangedichte der QCD in der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\chi L} + \mathcal{L}_{\text{ext}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\chi L} + \bar{Q} \gamma_\mu \left( v^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu \right) Q - \bar{Q} (s - i\gamma_5 p) Q \quad (2.7)$$

modifizieren. Die hinzuaddierten Felder sind hermitesche, farbneutrale  $2 \times 2$ -Matrizen, parametrisiert durch

$$v^\mu = \sum_{j=1}^3 \frac{\tau_j}{2} v_j^\mu, \quad a^\mu = \sum_{j=1}^3 \frac{\tau_j}{2} a_j^\mu, \quad s = \sum_{j=0}^3 \tau_j s_j, \quad p = \sum_{j=0}^3 \tau_j p_j$$

(mit  $\tau_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ ). Zerlegt man diese externe Lagrangedichte analog Gleichung (2.3) in Links- und Rechtsfelder und fordert darüber hinaus Invarianz unter lokalen  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Rotationen, so erzwingt dies die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned} v^\mu + a^\mu &\rightarrow V_R (v^\mu + a^\mu) V_R^\dagger + iV_R \partial^\mu V_R^\dagger, & s + ip &\rightarrow V_R (s + ip) V_L^\dagger, \\ v^\mu - a^\mu &\rightarrow V_L (v^\mu - a^\mu) V_L^\dagger + iV_L \partial^\mu V_L^\dagger, & s - ip &\rightarrow V_L (s - ip) V_R^\dagger, \\ v_{(s)}^\mu &\rightarrow v_{(s)}^\mu - \partial^\mu \Theta, \end{aligned}$$

wobei  $V_L \in SU(2)_L$  und  $V_R \in SU(2)_R$ .  $\Theta/3$  bezeichnet den gemeinsamen  $U(1)$ -Phasenfaktor. Definiert man ein erzeugendes Funktional über

$$\exp(i Z[v, a, s, p]) = \langle 0 | T \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{ext}} \right\} | 0 \rangle^{\chi L}, \quad (2.8)$$

so lassen sich die Ward-Identitäten durch Funktionalableitungen nach den externen Feldern gewinnen.

## 2.2 Chirale Störungstheorie

Die Quantenchromodynamik ist eine nicht explizit gelöste Theorie, d.h. es ist bislang nicht möglich, aus der fundamentalen Theorie das vollständige Hadronenspektrum abzuleiten oder sämtliche starke Wechselwirkungsprozesse mit beliebiger Genauigkeit zu beschreiben. Für große Energien, ab einigen GeV, ist asymptotisches

Verhalten durchaus zu erwarten [GW73a; GW73b; Pol73], im niederenergetischen Bereich hingegen ist eine perturbative Beschreibung der QCD mit den Quarkfeldern als dynamischen Freiheitsgraden nicht möglich. Eine etwaige Alternative hierzu stellt eine effektive Feldtheorie mit Goldstonebosonen – in diesem Falle Pionen – als dynamischen Freiheitsgraden dar: Die chirale Störungstheorie ( $\chi$ PT).

Die Idee einer effektiven Feldtheorie lässt sich mit Steven Weinbergs Worten zusammenfassen zu

*... if one writes down the most general possible Lagrangian, including all terms consistent with assumed symmetry principles, and then calculates matrix elements with this Lagrangian to any given order of perturbation theory, the result will simply be the most general possible S-Matrix consistent with analyticity, perturbative unitarity, cluster decomposition and the assumed symmetry principles. [Wei79]*

Die Konstruktion der *allgemeinsten* Lagrangedichte liefert jedoch a priori eine unendliche Anzahl an Termen und zugeordneten Niederenergiekopplungskonstanten, da bezüglich des Komplexitätsgrades neben den Symmetrien keinerlei weitere Einschränkungen vorgenommen werden. Daher ist es unabdingbar, eine konsistente Methode zu entwickeln, die die zur Verfügung stehenden Terme nach ihrer Relevanz klassifiziert, so dass mit einer endlichen Anzahl an Ausdrücken hinreichend genaue Approximationen physikalischer Observablen berechnet werden können. Bezeichnet  $q$  eine kleine Größe – Quarkmasse oder Pionenimpuls – so können die Terme einer effektiven Lagrangedichte durch eine Potenzreihe in  $q/\Lambda$  – mit einer typischen Skala der spontanen Symmetriebrechung von  $\Lambda \approx 1 \text{ GeV}$  – in der Form

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots \quad (2.9)$$

entwickelt werden. Hierbei treten ausschließlich geradzahlige chirale Ordnungen auf, da die Quarkmasse als kleinste Einheit proportional der quadrierten Pionenmasse ist und Impulse, gleichzusetzen mit Ableitungen, nur in lorentzinvarianter Form, d.h. kontrahiert und somit mindestens quadratisch, einfließen können.

Darüber hinaus ist es angebracht, ein Schema zu entwickeln, das den Einfluss eines einzelnen Feynmandiagramms vorhersagt, um so bereits im Vorfeld einer Berechnung dessen Beiträge abschätzen zu können. Im mesonischen Sektor der  $\chi$ PT wird das Weinberg'sche Zählschema [Wei79] verwendet, welches das Verhalten der invarianten Amplitude unter linearer Reskalierung äußerer Impulse,  $p_j \rightarrow tp_j$ , und quadratischer Reskalierung der leichten Quarkmassen,  $M_q \rightarrow t^2 M_q$ , untersucht und dem Diagramm eine chirale Ordnung  $\mathcal{O}(q^D)$  gemäß

$$\mathcal{M}(p_j, M_q) \rightarrow \mathcal{M}(tp_j, t^2 M_q) = t^D \mathcal{M}(p_j, M_q)$$

zuweist. Bezeichnet  $N_L$  die Anzahl an Schleifen in einem Diagramm und  $N_{2n}$  die Anzahl an  $\mathcal{L}^{(2n)}$ -Vertizes, so gilt allgemein

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1) N_{2n} + 2N_L. \quad (2.10)$$

### 2.2.1 Mesonische $\chi$ PT-Lagrangedichte

Die dynamischen Freiheitsgrade der mesonischen  $\chi$ PT im  $SU(2)$ -Sektor sind drei Pionerfelder. Die Transformationseigenschaften dieser Goldstonebosonen legen eine Parametrisierung durch eine unitäre  $2 \times 2$ -Matrix  $U$  in der Form

$$U = \exp\left(\frac{i\phi}{F}\right), \quad \phi = \tau^j \pi^j = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}$$

nahe [Wei68; CWZ69; CCWZ69];  $F$  steht für die Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall. Bezüglich der chiralen Gruppe  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  transformiert die Matrix  $U$  wie

$$U \rightarrow V_R U V_L^\dagger, \quad V_L \in SU(2)_L, V_R \in SU(2)_R$$

und besitzt die chirale Ordnung  $\mathcal{O}(q^0)$ . Weitere mögliche Bausteine einer Lagrangedichte sind, unter Verwendung von  $v^\mu = \frac{1}{2}(r^\mu + l^\mu)$  und  $a^\mu = \frac{1}{2}(r^\mu - l^\mu)$ ,

$$\begin{aligned} D^\mu U &= \partial^\mu U - i r^\mu U + i U l^\mu, & F_R^{\mu\nu} &= \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i [r^\mu, r^\nu], \\ \chi &= 2B(s + ip), & F_L^{\mu\nu} &= \partial^\mu l^\nu - \partial^\nu l^\mu - i [l^\mu, l^\nu], \end{aligned}$$

mit den chiralen Transformationseigenschaften und Ordnungen

$$\begin{aligned} D^\mu U &\rightarrow V_R D^\mu U V_L^\dagger, & \mathcal{O}(q^1); & & F_R^{\mu\nu} &\rightarrow V_R F_R^{\mu\nu} V_R^\dagger, & \mathcal{O}(q^2); \\ \chi &\rightarrow V_R \chi V_L^\dagger, & \mathcal{O}(q^2); & & F_L^{\mu\nu} &\rightarrow V_L F_L^{\mu\nu} V_L^\dagger, & \mathcal{O}(q^2). \end{aligned}$$

Die Niederenergiekonstante  $B$  ist über  $2F^2 B = -\langle \bar{Q} Q \rangle$  mit dem skalaren Quark-kondensat verknüpft.

Die allgemeinste, effektive Lagrangedichte niedrigster, d.h. zweiter, Ordnung – ausschließlich konstruiert aus den hier genannten Bausteinen und kompatibel mit sämtlichen chiralen, Poincaré-, Ladungs- und Paritätssymmetrien – lautet

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \text{Tr}\{D_\mu U (D^\mu U)^\dagger\} + \frac{F^2}{4} \text{Tr}\{\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\} \quad (2.11)$$

[GL84]. Die Berechnungen der vorliegenden Arbeit beschränken sich auf diese pionische Lagrangedichte, daher werden die  $F_{L|R}^{\mu\nu}$ -Terme im weiteren Verlauf keine

Rolle spielen. Eine Lagrangedichte höherer Ordnung würde wegen ihrer komplexeren Struktur neben den bereits eingeführten Niederenergiekonstanten  $F$  und  $B$  eine Vielzahl weiterer Koeffizienten enthalten, die nicht aus der  $\chi$ PT selbst sondern aus der – bisher nicht gelösten – QCD abgeleitet werden müssten. Da man diese Konstanten jedoch als freie, weil unbekannte, Parameter betrachten muss, liefert eine Rechnung höherer Ordnung im Kontext dieser Arbeit ohne Berücksichtigung weiterer physikalischer Prozesse zur Parameterregression keinen nennenswerten Vorteil. Weiterhin werden sämtliche externen Vektor- ( $v^\mu$ ) und Axialvektor- ( $a^\mu$ ) oder Rechts- ( $r^\mu$ ) und Linksfelder ( $l^\mu$ ) Null gesetzt, da diese für die Pionenstreuung nicht relevant sind.

Mit der für den isospinsymmetrischen Fall  $M_u = M_d = M_q$  gültigen Relation  $\chi = M^2 \mathbb{1}_{2 \times 2}$  folgt die finale Form der hier verwendeten pionischen Lagrangedichte (zur Massennomenklatur vgl. Anhang A.1)

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{F^2}{4} \text{Tr}\{\partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger\} + \frac{F^2 M^2}{4} \text{Tr}\{U^\dagger + U\}. \quad (2.12)$$

## 2.3 Resonanzen in der $\chi$ PT

Bisher ist eine ausschließlich pionische chiralen Störungstheorie betrachtet worden. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_\pi$  enthält nur drei dynamische Freiheitsgrade,  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  und  $\pi^0$ , verpackt in eine unitäre  $2 \times 2$ -Matrix  $U$ . Der Propagator einer Resonanz lässt sich, unter Vernachlässigung der Isospin- und Lorentzstruktur, in der Form

$$\frac{1}{k^2 - m^2} = -\frac{1}{m^2} \left\{ 1 + \frac{k^2}{m^2} + \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^3 + \dots \right\}$$

entwickeln. Solange diese Resonanz nicht explizit in die Theorie mit eingebaut wird, werden die einzelnen Terme der Entwicklung für kleine  $k^2$  in die Niederenergiekonstanten der entsprechenden chiralen Ordnung absorbiert. Sollte die Resonanz jedoch als expliziter, dynamischer Freiheitsgrad eingebunden sein, können auf einen Schlag sämtliche Ordnungen der Entwicklung berücksichtigt werden. Weiterhin wird der Konvergenzbereich der Theorie durch die Masse des tiefsten, nicht explizit eingebundenen Zustandes nach oben hin limitiert, so dass durch den Einbau einer Resonanz eine Vergrößerung des Gültigkeitsbereichs erreicht werden kann.

### 2.3.1 Lagrangedichte der Rhomesonen

Bereits frühzeitig wurde die enorme Relevanz von Vektormesonen, beispielsweise in der Beschreibung von Nukleonformfaktoren im Rahmen des Vektormesondominanzmodells [Sak69a; Sak69b], erkannt. Und auch im Hinblick auf die Pionenstreuung

unter Verwendung des *complex-mass renormalization* Schemas ist der Einbau des Rhomesons in die chirale Störungstheorie ein durchaus vielversprechender Ansatz.

Das Rhomeson ist ein Vektor-Isovektor und erscheint in der Natur mit einer ungeladenen und zwei geladenen Komponenten. Es besitzt bei einer Breite von  $\Gamma_\rho = (149.4 \pm 1.0)$  MeV eine Masse von  $m_\rho = (775.49 \pm 0.34)$  MeV und zerfällt zu nahezu 100% in zwei Pionen [A+08]. Da es sich um ein massives Teilchen mit Spin eins handelt, Lorentzvektoren jedoch vierkomponentige Größen sind, werden Zwangsbedingungen benötigt, die die vier Freiheitsgrade des Lorentzvektors auf die drei physikalischen des Rhomesons reduzieren. Es existieren verschiedene äquivalente Formulierungen effektiver Feldtheorien mit Vektormesonen [Bir96]; beginnt man mit der Vektorfelddarstellung aus [EGL+89], so folgt eine Lagrangedichte mit bis zu vier Vektorfeldern und renormierbaren Wechselwirkungen in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V = & -\frac{1}{2} \text{Tr}\{V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}\} + \left(m^2 + \frac{c_x}{4} \text{Tr}\{\chi_+\}\right) \text{Tr}\{V_\mu V^\mu\} \\ & + 4ig \text{Tr}\{V_\mu V_\nu \nabla^\mu V^\nu\} + 2g_1 \text{Tr}\{V_\mu V_\nu\} \text{Tr}\{V^\mu V^\nu\} \\ & + 2g_2 \text{Tr}\{V_\mu V^\mu\} \text{Tr}\{V_\nu V^\nu\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hierbei wurden Terme, die externe Felder beinhalten, ignoriert; die übrigen Komponenten lauten

$$\begin{aligned} V_\mu &= V_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, & u^2 &= U = \exp\left(i \frac{\tau^j \pi^j}{F}\right), \\ V_{\mu\nu} &= \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu, & u_\mu &= i \left\{ u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger \right\}, \\ \nabla_\mu V_\nu &= \partial_\mu V_\nu + [\Gamma_\mu, V_\nu], & \Gamma_\mu &= \frac{1}{2} \left( u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger \right), \\ \chi_\pm &= u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u. \end{aligned}$$

$g$ ,  $g_1$  und  $g_2$  sowie  $c_x$  sind Niederenergiekonstanten, welche a priori keinen symmetriebedingten Einschränkungen unterworfen sind. Bezüglich der chiralen Gruppe transformiert das Vektormesonstriplett  $V_\mu$  homogen, d.h.  $V_\mu \rightarrow K V_\mu K^\dagger$ , mit dem Kompensator  $K = (RUL^\dagger)^{-1/2} R \sqrt{U}$  und  $L \in \text{SU}(2)_L$  sowie  $R \in \text{SU}(2)_R$ .

Die Forderung, die oben genannte Lagrangedichte möge konsistent mit einem Satz von Zwangsbedingungen an das System sein, führt zu  $g_1 = -g_2 = g^2/2$  [DGS10] und somit einer wesentlichen Vereinfachung der Gleichung (2.13):

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2} \text{Tr}\{\mathcal{V}_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\mu\nu}\} + \left(m^2 + \frac{c_x}{4} \text{Tr}\{\chi_+\}\right) \text{Tr}\{V_\mu V^\mu\}, \quad (2.14)$$

wobei die neue Größe

$$\mathcal{V}_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu - ig [V_\mu, V_\nu] \quad (2.15)$$



eingeführt wird. Physikalische Observablen sind generell unabhängig von etwaigen Feldredefinitionen [KOS61], daher können die Vektorfelder  $V_\mu$  gemäß  $V_\mu \rightarrow \rho_\mu - \alpha\Gamma_\mu$  umgeschrieben werden, um Konsistenz mit den Zwangsbedingungen Ordnung für Ordnung zu gewährleisten. Die Wahl  $\alpha = i/g$ , welche die störungstheoretische Renormierbarkeit sicherstellt, sowie die KSRF-Relation  $m^2 = 2g^2 F^2$  [KS66; RF66] liefert schließlich die Lagrangedichte der Rhomesonen [DGKS09]

$$\mathcal{L}_{\pi\rho} = \left( m^2 + \frac{c_x \text{Tr}\{\chi_+\}}{4} \right) \text{Tr} \left\{ \left( \rho_\mu - \frac{i\Gamma_\mu}{g} \right) \left( \rho^\mu - \frac{i\Gamma^\mu}{g} \right) \right\} - \frac{1}{2} \text{Tr}\{\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu}\}, \quad (2.16)$$

mit den Feld- und Feldstärke-Definitionen

$$\rho_\mu = \rho_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, \quad \rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu - ig [\rho_\mu, \rho_\nu].$$

Der pionische Anteil verbirgt sich in  $\text{Tr}\{\chi_+\}$ , der im isospinsymmetrischen Grenzfall zu  $\text{Tr}\{\chi_+\} = M^2 \text{Tr}\{U^\dagger + U\}$  umgeschrieben werden kann und die einzige Komponente der Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$  darstellt; die übrigen Bausteine sind  $\mathcal{O}(q^0)$ . Die letztendlich eingeführten Rhomesonfelder transformieren (wegen der Feldredefinition) unter der chiralen Gruppe inhomogen, d.h. gemäß

$$\rho_\mu \rightarrow K \rho_\mu K^\dagger + \frac{i}{g} K \partial_\mu K^\dagger.$$

Zur Lagrangedichte (2.16) lässt sich zusätzlich ein mit den Symmetrien verträglicher Term der Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$ , der im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich für Einschleifenrechnungen relevant ist und voraussichtlich keine großen Beiträge liefern wird, hinzuaddieren:  $+id_x \text{Tr}\{\rho_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\}$  mit  $\Gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ .

### 2.3.2 Lagrangedichte der Sigamesonen

Das Sigameson – oder  $f_0(600)$ -Resonanz – ist ein Skalar-Isoskalar mit einer Masse von 400–1200 MeV und einer Breite von 600–1000 MeV, die eine eindeutige experimentelle Identifikation außerordentlich erschwert [A+08]. Es zerfällt, soweit beobachtet, in zwei Pionen, daher wird in diesem Abschnitt eine Lagrangedichte des Sigamesons mit Pionenwechselwirkungen abgeleitet.

Eine mögliche Sigalagrangedichte ähnelt der skalaren  $\phi^4$ -Theorie, ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(q^0)$  und lautet in ihrer allgemeinen Form

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m^2 \sigma^2 \right) + \frac{G_3}{3!} \sigma^3 + \frac{G_4}{4!} \sigma^4. \quad (2.17)$$

Terme höherer Ordnung in den Sigmafeldern spielen für die Pionenstreuung auf Einschleifenniveau keine Rolle.

Eine Wechselwirkung mit Pionen lässt sich durch Kombination der Pionenlagrangedichte aus Gleichung (2.12) mit einem bzw. zwei Sigmamesonen und entsprechenden Kopplungskonstanten  $\kappa_1$  bis  $\kappa_4$  konstruieren und liefert schließlich den Ausdruck der Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$ :

$$\mathcal{L}_{\pi\sigma} = \frac{F^2}{4} (\kappa_1\sigma + \kappa_3\sigma^2) \text{Tr}\{\partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger\} + \frac{F^2 M^2}{4} (\kappa_2\sigma + \kappa_4\sigma^2) \text{Tr}\{U^\dagger + U\}. \quad (2.18)$$

Wechselwirkungen von Rho- mit Sigmamesonen werden nicht betrachtet, da zum Einen keinerlei Hinweis auf einen derartigen Zerfall vorliegt, zum Anderen die der Referenz [EGL+89] entnommene Vektormesonlagrangedichte zumindest bis zur chiralen Ordnung vier keine Kopplung an Isoskalare zulässt.

## 2.4 Lagrangedichte der Pionenstreuung

Die vollständige, für diese Arbeit relevante, Lagrangedichte der Pionenstreuung lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{\pi\rho} + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{\pi\sigma} \\ &= \frac{F^2}{4} \text{Tr}\{\partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger\} + \frac{F^2 M^2}{4} \text{Tr}\{U^\dagger + U\} \\ &\quad + \left( m^2 + \frac{c_x M^2 \text{Tr}\{U^\dagger + U\}}{4} \right) \text{Tr}\left\{ \left( \rho_\mu - \frac{i\Gamma_\mu}{g} \right) \left( \rho^\mu - \frac{i\Gamma^\mu}{g} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr}\{\rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu}\} + i d_x \text{Tr}\{\rho_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu}\} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \mathbf{m}^2 \sigma^2) + \frac{G_3}{3!} \sigma^3 + \frac{G_4}{4!} \sigma^4 \\ &\quad + \frac{F^2}{4} (\kappa_1\sigma + \kappa_3\sigma^2) \text{Tr}\{\partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger\} + \frac{F^2 M^2}{4} (\kappa_2\sigma + \kappa_4\sigma^2) \text{Tr}\{U^\dagger + U\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

mit den Niederenergiekopplungskonstanten  $F$ ,  $c_x$ ,  $g$ ,  $d_x$ ,  $G_3$ ,  $G_4$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  und  $\kappa_4$  sowie der Pionenmasse  $M$ , Rhomesonmasse  $m$  und Sigmamasse  $\mathbf{m}$ . Sämtliche Parameter und Felder sind bisher unrenormierte Größen, im Sinne einer besseren Übersichtlichkeit wurde jedoch ein entsprechender Index 0 unterdrückt.

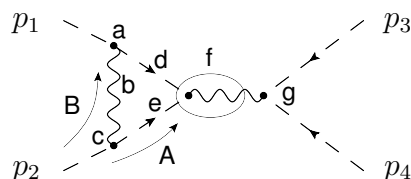
In den folgenden Kapiteln werden diese Lagrangedichte und die aus ihr abzuleitenden Diagrammstrukturen der maximalen chiralen Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  renormiert und anschließend mit physikalisch messbaren Observablen, speziell dem Wirkungsquerschnitt der Pionenstreuung, verknüpft.

## 2.5 Zählschema der $\chi$ PT mit resonanten Freiheitsgraden

Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt, ist es für eine effektive Feldtheorie naheliegend, ein Zählschema zu entwickeln, welches einzelne Diagramme nach ihrer Relevanz sortiert. Während dies im pionischen Sektor vergleichsweise einfach zu realisieren ist, da es ausschließlich kleine Impulse oder Massen zu berücksichtigen gilt, wird es durch den expliziten Einbau des Rho- und Sigamesons nicht unwesentlich verkompliziert. Da die Resonanzmassen nicht als kleine Größen angesehen werden können, ist es notwendig, für jedes einzelne Diagramm sämtliche Konfigurationen externer Impulsflüsse durch interne Linien zu überprüfen. Die darauf folgende Zuweisung chiraler Ordnungen der Propagatoren und Vertizes liefert für jede Flussmöglichkeit eine im Allgemeinen verschiedene Gesamtordnung, wobei die kleinste dieser Ordnungen als chirale Ordnung des Diagramms definiert ist.

Referenz [DGKS09] folgend zählt man einen Pionenpropagator, der nur kleine Impulse trägt als  $\mathcal{O}(q^{-2})$ , für den Fall großer Impulsüberträge  $\mathcal{O}(q^0)$ . Resonanzpropagatoren zählen als  $\mathcal{O}(q^0)$  wenn sie kleine Impulse tragen,  $\mathcal{O}(q^{-1})$  für große Impulse. Pionenmassen sind von der Ordnung  $\mathcal{O}(q^1)$ , Resonanzmassen  $\mathcal{O}(q^0)$ .

Zur Illustration wird exemplarisch das Diagramm



betrachtet. Da es sich um ein lorentzinvariantes Objekt handelt, können die externen Impulse so gewählt werden, dass  $p_1 = (M, \mathbf{0}) = \mathcal{O}(q^1)$ . Dies impliziert jedoch einen großen Impuls  $p_2$ , da die Gesamtenergie  $s = q^2 = (p_1 + p_2)^2 \approx m^2$  mindestens in der Größenordnung der Rhomasse liegen sollte. Die beiden möglichen Flüsse des großen Impulses  $p_2$  sind durch die Konfigurationen A und B gekennzeichnet. Fließt in der Schleife der kleine Impuls  $k$ , so finden sich mit den oben genannten Regeln die Zuweisungen

	a	b	c	d	e	f	g	Schleife	Gesamt
A	+1	0	0	-2	0	0	0	+4	+3
B	0	-1	0	0	-2	0	0	+4	+1

Die niedrigste der möglichen Ordnungen entspricht der chiralen Ordnung des Diagramms, in diesem Falle also  $\mathcal{O}(q^1)$ . Verwendet wurden hierbei die Kombination

$$\begin{array}{c} k \\ \swarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} q \\ \nwarrow \\ q-k \end{array} \propto (k - (q - k))_\mu \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m^2}}{q^2 - m^2} = \frac{2k^\nu - \frac{2k \cdot q q^\nu}{m^2}}{q^2 - m^2} + \frac{q^\nu}{m^2} = \mathcal{O}(q^0)$$

(symmetrisch bezüglich der Vertauschung von  $q - k$  und  $k$ ) und die Feynmanregel des einfachen  $\rho\pi\pi$ -Vertex (vgl. Anhang D).

Zur korrekten Klassifikation aller etwa einhundert Diagramme müssten mehrere hundert solcher Impulskonfigurationen überprüft werden, was nur mit sehr großem zeitlichen Aufwand möglich ist. Da die simple Berücksichtigung aller relevanten Diagramme, unabhängig ihrer Ordnung, sehr einfach realisiert werden kann, wird auf die Anwendung des Zählschemas für Einschleifendiagramme verzichtet.

Zweischleifendiagramme sind jedoch konsequent höherer Ordnung und damit unterdrückt.

# Kapitel 3

## Renormierung

Eine Quantenfeldtheorie wie die QCD oder  $\chi$ PT kann mit störungstheoretischen Methoden untersucht und die durch die Theorie vorhergesagten Observablen  $\Omega$  durch eine unendliche Reihe von (endlichen) Koeffizienten  $K_j$  und Potenzen (der Einfachheit halber nur) eines Entwicklungsparameters  $\alpha$  bestimmt werden,

$$\Omega(E) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(E, \mu) \alpha^j(E, \mu).$$

Hierbei steht  $E$  symbolisch für Energieabhängigkeiten,  $\mu$  bezeichnet die Renormierungsskala. Ist der Parameter  $\alpha$  hinreichend klein, wird eine sehr gute Approximation bereits durch wenige Terme der Reihe erreicht. Analog hierzu werden Observablen darüber hinaus in der Anzahl an Feynmandiagrammschleifen in der Form

$$\Omega(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \Omega^{(k)}(E)$$

entwickelt, da eine größere Schleifenordnung im Allgemeinen einen größeren Exponenten des Entwicklungsparameters  $\alpha$  bedingt. Eine Rechnung in mindestens Einschleifenordnung bringt jedoch eine wesentliche Komplikation mit sich: Der analytische Ausdruck eines Feynmandiagramms auf Einschleifenniveau enthält, nach Elimination sämtlicher Impuls-Deltadistributionen, mindestens ein meist unendliches Integral der Form

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \text{Teilchenpropagator(en)},$$

hier speziell die in Anhang A.3 aufgeführten skalaren Integrale  $A_0$  bis  $D_0$ . Da physikalische Observablen endlich sind, muss eine konsistente Methode gefunden werden, die Unendlichkeiten der Schleifendiagramme unter Kontrolle zu bringen. Dieses Vorgehen gliedert sich in zwei Teile, Regularisierung und Renormierung. Durch die Regularisierung wird es möglich, die Unendlichkeiten zu identifizieren

bzw. die Integrale in eine Form zu bringen, in der die Divergenzen offensichtlich zu Tage treten. Das Renormierungsschema definiert darauf hin physikalische Observablen auf eine Art und Weise, die die zuvor extrahierten Unendlichkeiten nicht in messbaren Größen erscheinen lässt. In der  $\chi$ PT wird fast ausschließlich die dimensionale Regularisierung [tV72] verwendet, da sie, im Gegensatz zur Pauli-Villars- oder *Cut-Off*-Regularisierung, die Poincaré- und Eichsymmetrie der QCD erhält [PS95; Ryd06].

Im klassischen Sinne würde man die  $\chi$ PT als nicht-renormierbare Theorie bezeichnen, da Unendlichkeiten der Schleifenintegrale nicht durch Redefinition eines endlichen Satzes von Feldern und Parametern beseitigt werden können. Da man es jedoch mit einer effektiven Feldtheorie, der die allgemeinste Lagrangedichte zugrunde gelegt wird, zu tun hat, lässt sich die störungstheoretische Renormierbarkeit zumindest Ordnung für Ordnung sicherstellen [Wei95].

### 3.1 Dimensionale Regularisierung

In der dimensional Regularisierung wird die Raumzeitdimension von vier auf ein allgemeines  $n$  erweitert und die potentiell divergenten Integrale durch analytische Fortsetzung für nicht-ganzzahlige Dimensionen zur Konvergenz gebracht. Die physikalische Realität wird daraufhin durch den Grenzübergang  $n \rightarrow 4$  erreicht, der die Unendlichkeiten manifest zu Tage treten lässt. Beginnt man exemplarisch mit einem Einnennerintegral, verallgemeinert das Integrationsmaß von vier auf  $n$  Dimensionen und verwendet darüber hinaus einige fundamentale Integralrelationen Gauß'scher Exponentialfunktionen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} A_0(M^2) &= -16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - M^2 + i0^+} \\ &= -M^2 \left\{ 32\pi^2 \lambda + \ln \left( \frac{M^2}{\mu^2} \right) \right\} + \mathcal{O}(n-4). \end{aligned}$$

Der Parameter  $\lambda$  beinhaltet neben endlichen Termen die für  $n \rightarrow 4$  auftretende Unendlichkeit des Integrals und lautet explizit

$$\lambda = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{n-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma_E + 1] \right\},$$

mit  $\gamma_E = -\Gamma'(1)$ . Der Parameter  $\mu$  mit  $\dim(\mu) = \dim(M)$  korrigiert die Massendimension des  $n$ -dimensionalen Integrals. Das sogenannte *modified minimal subtraction*-Renormierungsschema der  $\chi$ PT setzt  $\lambda = 0$  und entfernt somit diese Divergenz.

Vergleichbare Ausdrücke lassen sich ebenfalls für die im Anhang aufgeführten Zwei- und Dreinennerintegrale ableiten, jedoch ist die Angabe analytischer Lösungen nur für den Fall des  $B_0$ -Integrals mit akzeptablem Aufwand möglich, die  $C_0$  und  $D_0$  werden beinahe ausschließlich numerisch berechnet.

## 3.2 Complex-Mass Renormalization

Im nun Folgenden soll das *complex-mass renormalization* Schema etwas genauer geschildert werden: Die eine Theorie beschreibende Lagrangedichte hängt in ihrer allgemeinsten Form von einer beliebigen Anzahl an Quantenfeldern  $\Phi^0$  sowie einem endlichen oder unendlichen Satz von Kopplungskonstanten  $g^0$  ab,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi^0, g^0)$ . Diese sind a priori unrenormierte Größen (daher der Index 0), beinhalten daher durchaus Unendlichkeiten und besitzen somit kaum unmittelbare physikalische Aussagekraft. Berechnet man mit dieser Lagrangedichte messbare Größen wie Massen, Ladungen, Wirkungsquerschnitte, Formfaktoren, etc. – generisch mit  $\sigma$  bezeichnet – so sind dies natürlich ebenfalls Funktionen von unrenormierten Parametern und lassen sich, mit einem geeigneten Regulator  $\Lambda$ , durch  $\sigma = f^0(g^0, \Lambda)$  ausdrücken. Geht man von einer reellen Lagrangedichte aus und unterstellt dem Regulator die Erhaltung der Unitarität, so sind dementsprechend auch sämtliche Observablen, verknüpft mit einem S-Matrixelement  $S_{\beta\alpha} \leftrightarrow \sigma$ , reell in dem Sinne, dass  $S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}$ .

Die  $\sigma$  können dazu verwendet werden, einen funktionalen Zusammenhang zwischen den unrenormierten Kopplungskonstanten  $g^0$  und wohldefinierten physikalischen Observablen herzustellen und so die unrenormierten Größen durch renormierte, d.h. geeignet definierte, auszudrücken:

$$g^R := \phi(\sigma, \Lambda) = \phi(f^0(g^0, \Lambda), \Lambda) = \tilde{\varphi}(g^0, \Lambda) \Rightarrow g^0 = \varphi(g^R, \Lambda).$$

Einsetzen dieser Relationen in die anfängliche Lagrangedichte liefert Observablen, die ausschließlich von renormierten Kopplungen abhängen,

$$\sigma = f^0(g^0, \Lambda) = f^0(\varphi(g^R, \Lambda), \Lambda) = f^R(g^R, \Lambda). \quad (3.1)$$

Sollten sämtliche  $f^R$  nach Entfernen des Regulators endlich sein spricht man von renormierbaren, andernfalls von nichtrenormierbaren Theorien.

Zur kurzen Illustration dieser Prozedur wird die Quantenelektrodynamik hinzugezogen, die nur einen Massen- sowie einen Ladungsparameter enthält. Ausgehend von der bekannten QED-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{QED}}(m^0, e^0, \psi, \bar{\psi}, \mathcal{A}_\mu)$  definiert man die renormierten Parameter über den Pol des vollständigen Elektronenpropagators sowie die  $\gamma_\mu$ -Struktur der Elektronvertexfunktion, vereinfacht notiert als

$$m^R := \tilde{\varphi}_1(m^0, e^0, \Lambda), \quad e^R := \tilde{\varphi}_2(m^0, e^0, \Lambda).$$

Auflösen dieses Systems ist im Allgemeinen möglich und liefert

$$m^0 = \varphi_1(m^R, e^R, \Lambda), \quad e^0 = \varphi_2(m^R, e^R, \Lambda).$$

Ersetzt man in sämtlichen physikalischen Größen bzw. in der Ausgangslagrangedichte die unrenormierten Parameter  $m^0$  und  $e^0$  durch die entsprechenden  $\varphi_j$ , so folgen Observablen der Form

$$\sigma = f^R(m^R, e^R, \Lambda)$$

und daher, da die QED eine renormierbare Theorie ist, nach Entfernen des Regularisators endliche Werte. Sollte die Regularisierung die Unitarität der Theorie erhalten, ist die auf diese Art renormierte Lagrangedichte ebenfalls reell.

Für die bisherige Diskussion ist davon ausgegangen worden, ausschließlich reelle physikalische Größen und Kopplungen zu betrachten; jedoch lassen sich auch nicht direkt beobachtbare Größen  $\omega$  wie beispielsweise (Streu-)Amplituden oder komplexe Massen durch renormierte Konstanten in der Form  $\omega = f^R(g^R)$  ausdrücken. Hierbei sind diese  $f^R$  natürlich komplexe Funktionen mit reellen Argumenten. Eine ausreichende Anzahl solcher Relationen vorausgesetzt können renormierte Kopplungskonstanten daher gemäß  $g^R = \phi(\omega)$  notiert werden, woraus direkt

$$\sigma = f^R(g^R) = f^R(\phi(\omega)) = F^R(\omega) \quad (3.2)$$

folgt. Physikalisch messbare Observablen werden daher durch einen Satz von reellwertigen Funktionen mit komplexen Argumenten beschrieben, die, in Analogie zu Gleichung (3.1), Kopplungskonstanten genannt werden. Die durch diese *complex-mass renormalization* [DD06; DDRW99; DDRW05] definierten Kopplungen können im Allgemeinen komplex sein; da beim Übergang von reellen zu komplexen Konstanten keinerlei Einschränkung vorgenommen wurde, bedeutet dies, dass die Unitarität der Theorie, welche vorausgesetzt worden war, an keiner Stelle verletzt wird.

### 3.3 Renormierungsverfahren

Es gibt zwei gebräuchliche Formulierungen der Renormierungsdurchführung, die Gegentermmethode sowie BPHZ – benannt nach Bogoliubov, Parasiuk, Hepp und Zimmermann – [Wei95], welche exakt die selben Ergebnisse liefern, sich jedoch in der Berechnung dieser leicht unterscheiden. Da diese Arbeit beide Verfahren verwendet, werden sie im nun Folgenden kurz vorgestellt.

Die Gegentermmethode beginnt mit einer reellen Lagrangedichte unrenormierter Parameter und Felder,  $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}(g^0, \Phi^0)$ . Diese werden identisch umgeschrieben in renormierte Parameter und Gegenterme,

$$g^0 = g^R + \delta g, \quad \Phi^0 = \sqrt{Z}\Phi^R = \sqrt{1 + \delta Z}\Phi^R = \left(1 + \frac{\delta Z}{2} + \dots\right)\Phi^R,$$



wodurch die Lagrangedichte in einen renormierten und einen Gegentermteil zerfällt,

$$\mathcal{L}(g^0, \Phi^0) = \mathcal{L}(g^R + \delta g, \sqrt{Z}\Phi^0) = \mathcal{L}^R(g^R, \Phi^R) + \mathcal{L}^{\text{GT}}(g, \delta g, \delta Z, \Phi^R). \quad (3.3)$$

Diese beiden Teile sind, im Gegensatz zu  $\mathcal{L}$ , im Allgemeinen nicht separat reell. In  $\mathcal{L}^{\text{GT}}$  fließen sämtliche Terme ein, welche ein  $\delta g$  oder  $\delta Z$  beinhalten, auch gemischte Strukturen. Durch geschickte Wahl der  $\delta g$  ist es möglich, ungewollte Beiträge der Lagrangedichte zu physikalischen Observablen, beispielsweise Unendlichkeiten oder zählschemaverletzende Terme, zu absorbieren und somit in renormierten Größen nicht explizit auftreten zu lassen. Betrachtet man als Beispiel die physikalische Masse eines bezüglich der starken Wechselwirkung stabilen Pions (unter Berücksichtigung expliziter vektormesonischer Freiheitsgrade), die durch die Polposition des vollständigen Pionenpropagators,

$$p^2 - M_0^2 - \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=M_{\text{ph}}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{\text{ph}}^2 = M_0^2 + \Sigma(M_{\text{ph}}^2),$$

festgelegt ist.  $\Sigma(p^2)$  parametrisiert die (unendlichen) Selbstenergieeinschübe (vgl. Abschnitt 3.4.1). Durch Aufspalten der unrenormierten Pionenmasse in renormierte sowie Gegentermmasse,  $M_0^2 = M_R^2 + \delta M^2$ , ergibt sich für die physikalische Pionenmasse

$$M_{\text{ph}}^2 = M_R^2 + \delta M^2 + \Sigma(M_{\text{ph}}^2),$$

und somit – eine geeignete Wahl der  $\delta M^2$  vorausgesetzt – ein endlicher Wert; die Unendlichkeiten der Selbstenergieeinschübe können exakt durch Gegenterme weggehoben werden. Weiterhin könnte durch die Definition  $\delta M^2 = -\Sigma(M_{\text{ph}}^2)$  die physikalische gleich der renormierten Masse gesetzt werden, sofern dies gewünscht oder für die Rechnungen vorteilhaft ist.

Prinzipiell ist es nicht notwendig, die Gegenterme explizit zu berechnen, da diese ohnehin nur dazu verwendet werden, Schleifendiagramme an einer bestimmten (kinematischen) Stelle von sich selbst abzuziehen. Die Alternative zum Gegentermformalismus, BPHZ, macht von genau dieser Eigenheit Gebrauch: Anstelle explizit Gegenterme in die Lagrangedichte hineinzudefinieren und somit die funktionalen Zusammenhänge zu verkomplizieren, werden ungewollte Beiträge eines unrenormierten Diagramms  $D(k, g^0)$  durch Abzug seiner selbst, ausgewertet an einer bestimmten kinematischen Stelle  $k'$  mit anschließender Ersetzung  $g^0 \rightarrow g^R$ , beseitigt. Vereinfacht ausgedrückt ergeben sich so renormierte Diagramme  $D^R(k, g^R)$ , formal gemäß

$$D^R(k, g^R) = \left\{ D(k, g^0) - D(k', g^0) \right\} \Big|_{g^0 \rightarrow g^R} \quad (3.4)$$

zu notieren. Übertragen auf das Beispiel der Pionenmasse bedeutet dies

$$M_{\text{ph}}^2 = M_0^2 + \Sigma(M_{\text{ph}}^2) = M_R^2 + \Sigma^R(M_{\text{ph}}^2) = M_R^2 + \Sigma(M_{\text{ph}}^2) - \Sigma(k'^2),$$

wobei die geeignete kinematische Stelle  $k'^2$  natürlich wiederum  $k'^2 = M_{\text{ph}}^2$  gesetzt werden kann, um die renormierte der physikalischen Masse anzugleichen.

### 3.4 Renormierung relevanter Diagrammstrukturen

Das folgende Kapitel 4 etwas vorwegnehmend werden in diesem Abschnitt jegliche für die Pionenstreuung relevanten Diagrammstrukturen nach dem Schema der *complex-mass renormalization* renormiert. Sämtliche Berechnungen finden auf dem Einschleifenniveau statt, es werden sowohl die Gegentermmethode als auch BPHZ verwendet.

Die unrenormierte Lagrangedichte der Pionen, Rho- und Sigmesonen lautet unter Berücksichtigung der Definitionen in Abschnitt 2.3

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{F^2}{4} \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\} + \frac{F^2 M^2}{4} \text{Tr}\{U + U^\dagger\} \\ & + \left( m^2 + \frac{c_x M^2 \text{Tr}\{U + U^\dagger\}}{4} \right) \text{Tr}\left\{ \left( \rho_\mu - \frac{i\Gamma_\mu}{g} \right) \left( \rho^\mu - \frac{i\Gamma^\mu}{g} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \text{Tr}\{\rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu}\} + \text{id}_x \text{Tr}\{\rho_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu}\} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \mathbf{m}^2 \sigma^2) \\ & + \frac{F^2 \kappa_1 \sigma}{4} \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\} + \frac{F^2 M^2 \kappa_2 \sigma}{4} \text{Tr}\{U + U^\dagger\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wie in Kapitel 5 ausführlich dargelegt werden wird, steuert das Sigmeson keine großen Beiträge zum in dieser Arbeit betrachteten Wirkungsquerschnitt der Pionenstreuung bei, daher werden – um die Gesamtzahl an freien Parametern überschaubar zu halten – die Konstanten  $\kappa_3$ ,  $\kappa_4$ ,  $G_3$  und  $G_4$  (vgl. Gl. (2.19)) gleich null gesetzt, wodurch sich die Struktur der Lagrangedichte nicht unwesentlich vereinfacht. Die übrigen Parameter und Felder sind unrenormierte und werden durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} \pi^a & \rightarrow \sqrt{Z_\pi} \pi^a, & \rho_a^\mu & \rightarrow \sqrt{Z_\rho} \rho_a^\mu, & \sigma & \rightarrow \sqrt{Z_\sigma} \sigma, \\ M^2 & \rightarrow M_R^2 + \delta M^2, & m^2 & \rightarrow m_R^2 + \delta m^2, & \mathbf{m}^2 & \rightarrow \mathbf{m}_R^2 + \delta \mathbf{m}^2, \\ F & \rightarrow F + \delta F, & c_x & \rightarrow c_x + \delta c_x, & \kappa_1 & \rightarrow \kappa_1 + \delta \kappa_1, \\ g & \rightarrow g + \delta g, & d_x & \rightarrow d_x + \delta d_x, & \kappa_2 & \rightarrow \kappa_2 + \delta \kappa_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

in renormierte Größen überführt. Die Feldredefinitions konstanten  $Z_{\pi|\rho|\sigma}$  sind beliebig und lassen sich daher in der Form  $1 + \delta Z_{\pi|\rho|\sigma}$  zerlegen. Sämtliche  $\delta$ -Terme entsprechen Schleifenkorrekturen zu den renormierten Größen.

Der einzige Gegenterm, der zu Demonstrationszwecken analytisch berechnet wird, ist  $\delta g$  (Abschnitt 3.4.2). Die Massen-Gegenterme werden direkt mit den Selbstenergieeinschüben kombiniert (Abschnitt 3.4.1), die endlichen Anteile der Parameter  $\delta F$ ,  $c_x$ ,  $d_x$ ,  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  werden durch nichtlineare Regressionsalgorithmen numerisch an experimentelle Daten angepasst (Kapitel 5).

### 3.4.1 Propagatoren

Der freie (*undressed*) Propagator  $\mathcal{P}^f$  beschreibt die räumliche und zeitliche Evolution eines Teilchen ohne Wechselwirkung zwischen zwei verschiedenen Raumzeitpunkten. Er ist impulsabhängig und definiert über die Fourier-Transformation

$$\mathcal{P}^f(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle 0 | T(\phi^f(x), \phi^f(0)) | 0 \rangle,$$

wobei das freie Feld  $\phi^f$  durchaus Isospin- oder Lorentzindizes tragen kann, die jedoch für diese allgemeinen Betrachtungen außer Acht gelassen werden. Der Operator  $T$  beschreibt das zeitgeordnete Produkt der Felder im Argument (definiert in Anhang A.1).

Der vollständige (*dressed*) Propagator  $\mathcal{P}$  hingegen beinhaltet darüber hinaus eine unendliche Anzahl an Energieeinschüben  $\mathcal{E}$ , welche exakt der Summe aller einteilchenirreduziblen Einschleifendiagramme mit zwei äußeren Linien entsprechen. Beschreibt der gefüllte Vertex den vollständigen Propagator sowie der gekreuzte Vertex die Energieeinschübe (ohne äußere Linien), so gilt diagrammatisch (durch Ausklammern eines Energieeinschubes)

$$\begin{aligned} \text{---}\bullet\text{---} &= \text{-----} + \text{---}\otimes\text{---} + \text{---}\otimes\text{---}\otimes\text{---} + \dots \\ &= \text{-----} + \text{---}\otimes\text{---}\bullet\text{---} . \end{aligned}$$

Formal lässt sich, sofern man sämtliche Indexstrukturen außer Acht lässt, aus dieser Gleichung der vollständige Propagator in der Form

$$\text{---}\bullet\text{---} = \frac{i}{\text{-----} - i \otimes}$$

extrahieren. Algebraisch übersetzt sich dies in

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^f + \mathcal{P}^f \mathcal{E} \mathcal{P}^f + \mathcal{P}^f \mathcal{E} \mathcal{P}^f \mathcal{E} \mathcal{P}^f + \dots = \mathcal{P}^f + \mathcal{P}^f \mathcal{E} \mathcal{P} \quad (3.7)$$

und wird gemäß

$$(1 - \mathcal{P}^f \mathcal{E}) \mathcal{P} = \mathcal{P}^f \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} = \frac{i}{\frac{i}{\mathcal{P}^f} - i \mathcal{E}} \quad (3.8)$$

nach  $\mathcal{P}$  aufgelöst. Sollten die oben genannten Felder  $\phi^f$  Isospin- oder Lorentzindizes tragen, werden diese ebenfalls explizit in den algebraischen Ausdrücken der freien Propagatoren auftreten, so dass eine Lösung der Gleichung (3.8) durch eine allgemeine Parametrisierung der relevanten Komponenten mit anschließendem Koeffizientenvergleich zu erhalten ist.

Da in der Quantenfeldtheorie die Position der Singularität eines vollständigen Teilchenpropagators der physikalischen Teilchenmasse entspricht, ist dadurch unser Renormierungspunkt bestimmt: Die renormierte Masse gleicht der Polposition des Propagators und daher der physikalischen Masse, einer im Falle der Rho- und Sigmesonen komplexen Größe (vgl. Anhang A.1).

### Pionpropagator

Der freie, renormierte Pionpropagator, der aus den rein pionischen Anteilen der Lagrangedichte (3.5) nach den Ersetzungen (3.6) folgt, lautet

$$i\Delta_{\pi,ab}^f(p) = \delta_{ab} \frac{i}{p^2 - M_R^2}.$$

Gegenterme werden entgegen den formalen Ausführungen des Abschnitts 3.3 von nun an als zusätzliches Diagramm explizit in den Energieeinschüben  $\mathcal{E}$  berücksichtigt; diese werden mit der Selbstenergie  $\Sigma$  gemäß  $\mathcal{E} = -i\Sigma(p^2)$  verknüpft und entsprechen der Summe der Diagramme in Abbildung 3.1. Die Beiträge der Diagramme P2 und P3 können vollständig durch das Gegentermdiagramm PGT absorbiert werden und spielen daher bei der Berechnung der Pionselbstenergie keine Rolle. Für den vollständigen Propagator folgt (vgl. Gl. (3.8)) direkt

$$i\Delta_{\pi,ab} = \delta_{ab} \frac{i}{p^2 - M_R^2 - \Sigma(p^2)} \quad (3.9)$$

und für die physikalische Pionmasse daher

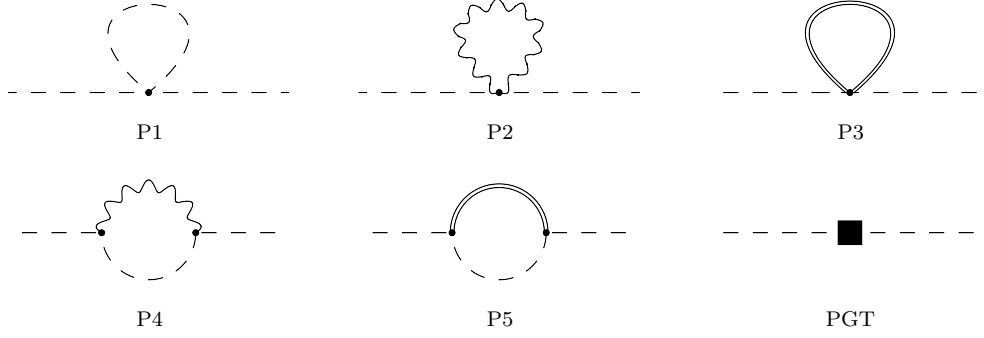
$$p^2 - M_R^2 - \Sigma(p^2) \Big|_{p^2=M_{\text{ph}}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{\text{ph}}^2 = M_R^2 + \Sigma(M_{\text{ph}}^2). \quad (3.10)$$

Der Renormierungspunkt wird durch  $M_R^2 = M_{\text{ph}}^2$  bzw.  $\Sigma(M_{\text{ph}}^2) = 0$  festgelegt.

Entwickelt man die Selbstenergieeinschübe  $\Sigma(p^2)$  um ein beliebiges  $p^2 = \lambda^2$ ,

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\lambda^2) + (p^2 - \lambda^2) \Sigma'(\lambda^2) + (p^2 - \lambda^2)^2 \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (3.11)$$

wobei in  $\tilde{\Sigma}$  sämtliche Terme höherer Ordnung zusammengefasst sind, so lässt sich der vollständige Propagator unter Verwendung von Gleichung (3.10) und dem



**Abbildung 3.1:** Selbstenergiendiagramme des Pions. Gestrichelte, Wellen- und Doppellinien stehen für Pionen, Rho- und Sigmamesonen. PGT entspricht dem Gegenterm  $\delta M^2$ .

Entwicklungspunkt  $\lambda = M_{\text{ph}}$  umschreiben zu

$$\begin{aligned} i\Delta_{\pi,ab} &= \delta_{ab} \frac{i}{(p^2 - M_{\text{ph}}^2) \left\{ 1 - \Sigma'(M_{\text{ph}}^2) - (p^2 - M_{\text{ph}}^2) \tilde{\Sigma}(p^2) \right\}} \\ &= i\delta_{ab} \left\{ \frac{1 + \Sigma'(M_{\text{ph}}^2)}{p^2 - M_{\text{ph}}^2} + \tilde{\Sigma}(p^2) \right\} + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Eine an die Feldredefinitionskonstante  $Z_\pi$  gestellte Renormierungsbedingung setzt das Residuum  $R_\pi = 1 + \Sigma'(M_{\text{ph}}^2)$  gleich eins.

### Rhopropagator

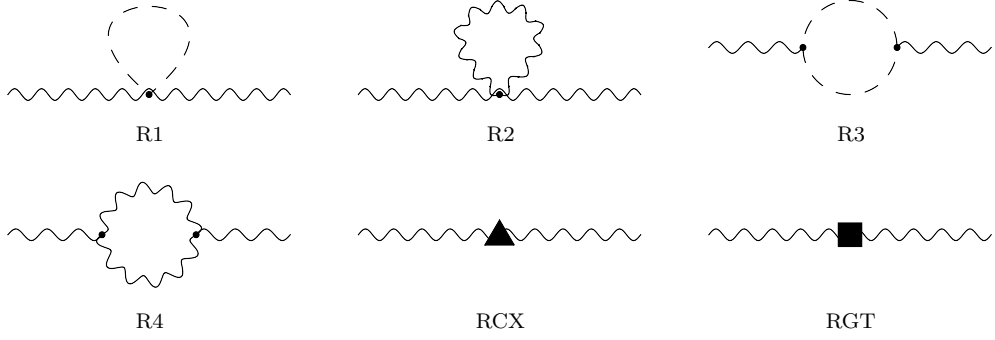
Die reinen Rhomesonenterme der Lagrangedichte aus Gleichung (3.5) liefern einen renormierten, freien Rhopropagator der Form

$$i\Delta_{\rho,ab}^{f,\mu\nu}(p) = -i\delta_{ab} \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_R^2}}{p^2 - m_R^2}.$$

Verknüpft man die Energieeinschübe  $\mathcal{E}$ , welche der Summe der Diagramme in Abbildung 3.2 entsprechen, mit der Selbstenergie über  $\mathcal{E} = i\Pi^{\mu\nu}(p^2)$ , so lassen sich die  $\Pi^{\mu\nu}(p^2)$  – zumindest in der vorliegenden Ordnung – in der Form

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = i \left\{ g^{\mu\nu} \mathcal{X} + (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) \Pi(p^2) \right\},$$

parametrisieren;  $\mathcal{X}$  ist eine vom Teilchenimpuls unabhängige Funktion. Die Diagramme R2, R4 und RCX können wiederum in das Gegentermdiagramm RGT absorbiert werden. Verwendet man diese Parametrisierung, den vollständigen Propagator gemäß der ersten der beiden Gleichungen (3.8) und darüber hinaus eine



**Abbildung 3.2:** Selbstenergiendiagramme des Rhomesons. Gestrichelte und Wellenlinien stehen für Pionen bzw. Rhomesonen. Das Dreieck RCX steht für  $c_x M^2$ , RGT für den Gegen-term  $\delta m^2$ .

allgemeine Parametrisierung der Lorentzstruktur des Propagators selbst,  $\Delta^{\mu\nu} = \Delta_1 g^{\mu\nu} + \Delta_2 p^\mu p^\nu$ , so folgt nach einem Koeffizientenvergleich

$$i\Delta_{\rho,ab}^{\mu\nu}(p) = -i\delta_{ab} \frac{g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu \frac{1+\Pi(p^2)}{m_R^2 + \mathcal{X}}}{p^2 - m_R^2 - \mathcal{X} + p^2 \Pi(p^2)}. \quad (3.13)$$

Der Pol des Propagators liefert erneut die physikalische Masse des Rhomesons,

$$p^2 - m_R^2 - \mathcal{X} + p^2 \Pi(p^2) \Big|_{p^2=m_{\text{ph}}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\text{ph}}^2 = \mathcal{X} + m_R^2 - m_{\text{ph}}^2 \Pi(m_{\text{ph}}^2). \quad (3.14)$$

Als Renormierungsbedingung erhält man  $\mathcal{X} = m_{\text{ph}}^2 \Pi(m_{\text{ph}}^2)$ .

Nach einer Entwicklung der Selbstenergie analog Gleichung (3.11) um  $p^2 = m_{\text{ph}}^2$  und unter zusätzlicher Verwendung der Polposition aus (3.14) folgt schließlich

$$i\Delta_{\rho,ab}^{\mu\nu}(p) = -i\delta_{ab} \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_{\text{ph}}^2}}{p^2 - m_{\text{ph}}^2} \left\{ 1 - \Pi(m_{\text{ph}}^2) - m_{\text{ph}}^2 \Pi'(m_{\text{ph}}^2) \right\} \\ + i\delta_{ab} \left\{ g^{\mu\nu} \Pi'(m_{\text{ph}}^2) + (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{\Pi}(p^2) \right\} + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.15)$$

Das Residuum  $R_\rho = 1 - \Pi(m_{\text{ph}}^2) - m_{\text{ph}}^2 \Pi'(m_{\text{ph}}^2)$  lässt sich durch geeignete Wahl der Feldredefinitions-konstante  $Z_\rho$  ebenfalls gleich eins setzen und muss daher nicht gesondert berücksichtigt werden. Diagrammatisch ergibt sich

$$\text{wavy line with diamond} = \text{wavy line} + \text{wavy line with circle}, \quad (3.16)$$

wobei der Diamantvertex den polfreien Einschleifenbeitrag darstellt.

### Sigma-Propagator

Der freie, renormierte Sigma-Propagator ist – bis auf Isospinindizes – identisch mit dem Pion-Propagator und lautet

$$i\Delta_\sigma^f(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mathbf{m}_R^2}.$$

Die Argumentationskette des Pion-Propagators kopierend erhält man mit den Energieeinschüben  $\mathcal{E} = -i\Xi(p^2)$  – der Summe der Diagramme aus Abbildung 3.3 – als vollständigen Propagator

$$i\Delta_\sigma = \frac{i}{p^2 - \mathbf{m}_R^2 - \Xi(p^2)}. \quad (3.17)$$

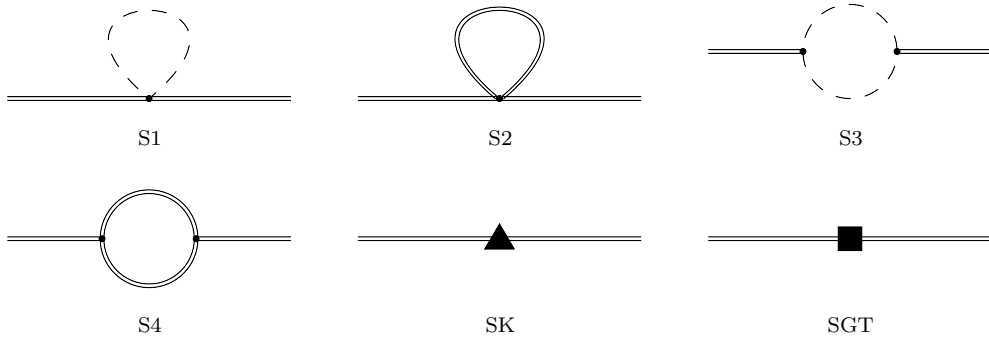
Hierbei werden die Beiträge der Diagramme S2, S4 und SK wieder in die Gegen-termkomponenten absorbiert. Da für die hiesigen Betrachtungen die Parameter  $G_3$ ,  $G_4$ ,  $\kappa_3$  und  $\kappa_4$  null gesetzt werden, spielen die genannten Diagramme sowie S1 ohnehin keine Rolle. Die Entwicklung (3.11) verwendend folgt analog Gleichung (3.12)

$$i\Delta_\sigma = i \left\{ \frac{1 + \Xi'(\mathbf{m}_{\text{ph}}^2)}{p^2 - \mathbf{m}_{\text{ph}}^2} + \tilde{\Xi}(p^2) \right\} + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.18)$$

Mit einem geeigneten  $Z_\sigma$  folgt  $R_\sigma = 1 + \Xi'(\mathbf{m}_{\text{ph}}^2) = 1$ . Die diagrammatische Entsprechung zu Gleichung (3.18) lautet

$$\text{---}\bullet\text{---} = \text{---} + \text{---}\blacklozenge\text{---}, \quad (3.19)$$

der Diamantvertex steht wiederum für den polfreien Einschleifenbeitrag  $\tilde{\Xi}(p^2)$ .



**Abbildung 3.3:** Selbstenergiendiagramme des Sigamesons. Gestrichelte und Doppellinien stehen für Pionen bzw. Sigamesonen. Das Dreieck SK steht für  $\kappa_4 M^2 F^2$ , SGT für den Gegenterm  $\delta m^2$ .

### 3.4.2 Vertizes

#### Vierpionenvertex

Der aus der Lagrangedichte in Gleichung (3.5) abzuleitende Vierpionenvertex enthält einen Koeffizienten  $1/F^2$ , der mit den Substitutionen (3.6) zerlegt werden kann in

$$\frac{1}{F^2} \rightarrow \frac{1}{(F + \delta F)^2} = \frac{1}{F^2} - \frac{2\delta F}{F^3} + \mathcal{O}(\hbar^2) = \frac{1}{F^2} \left( 1 - \frac{2\delta F}{F} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.20)$$

Während der Wert des renormierten Parameters  $F = 0.092 \text{ GeV}$  konstant ist, kann der Gegentermteil dazu verwendet werden, die Diagramme, welche sich topologisch auf einen Vierpionenvertex reduzieren lassen (die im folgenden Kapitel daher mit Kontaktdiagramme bezeichneten, vgl. B2–B8 in Abbildung 4.1), so zu renormieren, dass experimentelle Daten optimal beschrieben werden. Für diese Arbeit wird der endliche Teil des Parameters  $\delta F$  als durch nichtlineare Regression anzupassender, komplexwertiger Freiheitsgrad betrachtet ohne seinen Zahlenwert durch theoretische Überlegungen – wie beispielsweise der KSRF-Relation – analytisch zu bestimmen.

Ausgedrückt durch die Formulierungen des Abschnitts 3.3 verwendet man BPHZ, um die Kontaktdiagramme an einer bestimmten kinematischen Stelle zu subtrahieren. Bezeichnet der ausgegraute den vollständigen, renormierten Vierpionenvertex, der gekreuzte die Summe aller einteilchenirreduziblen Einschleifendiagramme mit Rhomesonen, so bedeutet dies

$$\text{Dotted Circle} = \left( 1 - \frac{2\delta F}{F} \right) + \text{Crossed Circle} + \text{Crossed Circle} \Big|_{\rho \rightarrow \sigma}. \quad (3.21)$$



Da es für die folgenden Rechnungen vorteilhaft ist, an dieser Stelle die einteilchenirreduziblen Einschleifendiagramme mit Sigmamesonen (Abbildung 4.1, B9–B13) in den renormierten Vierpionenvertex mit hineinzudefinieren, soll dies durch den letzten Term symbolisch geschehen. Die Renormierung wird hierdurch jedoch nicht beeinflusst, da das Sigmameson mit einem Isospin von null nicht durch den Pionenvertex renormiert wird.

### $\rho\pi\pi$ -Vertex

Die Kopplungskonstante der  $\rho\pi\pi$ -Wechselwirkung ist der Parameter  $g$ , der durch die Renormierung (3.6) zerlegt wird in

$$g \rightarrow g + \delta g \quad (3.22)$$

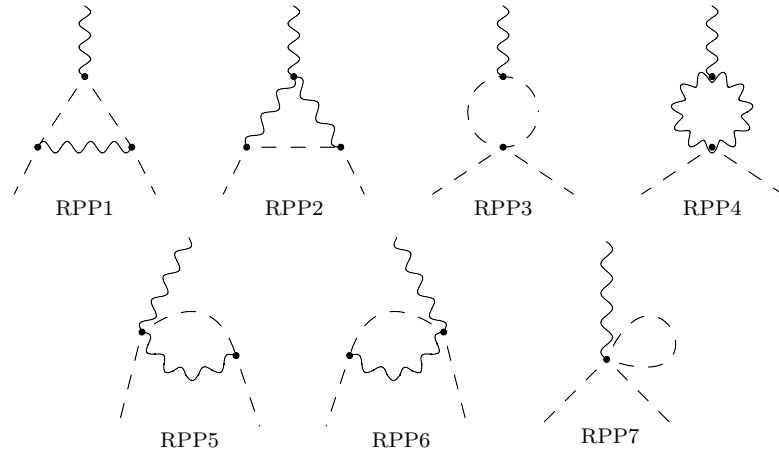
und die Stärke des Rhozerfalls nach zwei Pionen beschreibt. Als Renormierungsbedingung zur expliziten Berechnung des Gegenterms  $\delta g$  fordert man, dass der vollständige  $\rho\pi\pi$ -Vertex – einschließlich Einschleifenkorrekturen und Gegentermen – im chiralen Grenzfall der renormierten Kopplung  $g$  entspricht. Bezeichnet der ausgegraute den vollständigen, renormierten Vertex, die Box den Gegenterm, das Dreieck einen durch die Renormierung entstehenden Feldredefinitionsterm sowie der gekreuzte Vertex die Summe der in Abbildung 3.4 aufgeführten Einschleifendiagramme im chiralen Grenzfall, so gilt

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\ &= \varepsilon_{abc} (p_i - p_f)^\mu \left\{ g + \delta g + g \left( \delta Z_\pi + \frac{\delta Z_\rho}{2} \right) + \Gamma_{\chi L}^{(1)} \right\} \\ &\stackrel{!}{=} \varepsilon_{abc} (p_i - p_f)^\mu g. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die einlaufenden Pionenimpulse  $p_i^\mu$  und  $p_f^\mu$  hängen hierbei mit dem Rhomesonimpuls  $q^\mu$  über  $p_i + p_f = -q$  zusammen und werden im chiralen Grenzfall auf die (reelle) Massenschale gesetzt, so dass  $p_i^2 = p_f^2 = M_\pi^2 = 0$  und  $q^2 = m_\rho^2$ .

Für den Gegenterm folgt schließlich

$$\delta g = -g \left( \delta Z_\pi + \frac{\delta Z_\rho}{2} \right) - \Gamma_{\chi L}^{(1)}. \quad (3.24)$$



**Abbildung 3.4:**  $\rho\pi\pi$ -Vertexdiagramme. Gestrichelte bzw. Wellenlinien stehen für Pionen resp. Rhomesonen.

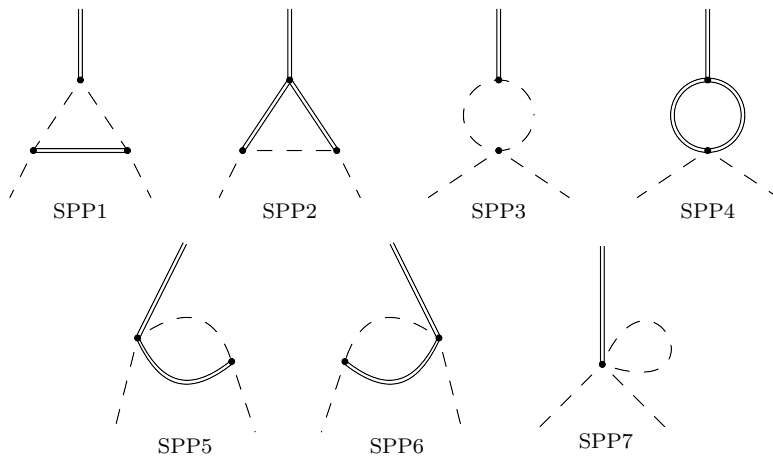
### $\sigma\pi\pi$ -Vertex

Der  $\sigma\pi\pi$ -Vertex enthält, im Gegensatz zum  $\rho\pi\pi$ -Vertex, zwei Kopplungskonstanten,  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , welche prinzipiell analog zu  $g$  durch die Gegentermmethode renormiert werden könnten. Der Einfachheit halber soll an dieser Stelle jedoch BPHZ zur Anwendung kommen, d.h. statt Gegenterme explizit zu berechnen werden sämtliche Einschleifen- $\sigma\pi\pi$ -Diagramme an einer bestimmten kinematischen Stelle subtrahiert. Im Unterschied zum Kontaktvertex wird diese kinematische Stelle jedoch festgelegt und nicht durch Regressionsalgorithmen bestimmt.

Bezeichnet der graue wiederum den renormierten Vertex, der gekreuzte die Summe der Diagramme in Abbildung 3.5, so gilt

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \parallel \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \parallel \\ \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \parallel \\ \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} p_i^2 = p_f^2 = M_\pi^2 \\ q^2 = m_\sigma^2 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Die Diagramme SPP2, SPP4, SPP5, SPP6 und SPP7 spielen keine Rolle, da die entsprechenden Kopplungskonstanten null gesetzt wurden (vgl. Gl. (3.5)).



**Abbildung 3.5:**  $\sigma\pi\pi$ -Vertexdiagramme. Gestrichelte bzw. Doppellinien stehen für Pionen resp. Sigamesonen.

# Kapitel 4

## Pionenstreuung

Die Pionenstreuung als Prototyp einer Goldstonebosonreaktion wurde bereits frühzeitig als eines der wichtigsten Experimente zur Exploration hadronischer Strukturen erkannt. Pionen sind die leichtesten der Hadronen und ihre Eigenschaften eng mit den Symmetrien der QCD verknüpft. Bereits in den 1960er Jahren sind im Rahmen der Stromalgebra-Formulierung [Wei66] präzise Vorhersagen von Streulängen getroffen worden, die mit Ergebnissen der führenden Ordnung der chiralen Störungstheorie konsistent sind. Berechnungen der nächsten (NLO) [GL84] sowie der übernächsten (NNLO) [BCE+96; BCE+97] Ordnung und Kombination von chiralen und dispersiven Darstellungen [Roy71; ACGL01] liefert schließlich die überaus präzisen, theoretischen Voraussagen [CGL00; CGL01a]

$$a_0^0 = 0.220 \pm 0.005, \quad a_0^2 = -0.0444 \pm 0.0010,$$

welche hervorragend mit experimentellen Daten, erhalten aus kombinierten Analysen der BNL-E865 [P+01; P+03] und NA48/2 [B+06] Kollaborationen,

$$a_0^0 = 0.217 \pm 0.008_{\text{exp}} \pm 0.006_{\text{th}}$$

übereinstimmen.

Weiterhin ist die Abschätzung einer oberen Grenze der skalenunabhängigen LEC  $\bar{l}_3$ , die im Kontext der physikalischen Pionenmasse der Ordnung  $\mathcal{O}(q^4)$  (die sogenannte Gell-Mann-Oakes-Renner Relation [GMOR68]),

$$M_\pi^2 = M^2 - \frac{\bar{l}_3}{32\pi^2 F^2} M^4 + \mathcal{O}(M^6),$$

eine wichtige Rolle spielt [GMOR68], von großer Relevanz. Sollten die Terme quadratisch in  $M^2$  im Vergleich zu denen führender Ordnung nicht unterdrückt sein, würde dies das bestehende Zählschema der  $\chi$ PT falsifizieren [KMSF95]. Da jedoch  $|\bar{l}_3| \leq 16$  [CGL01b] summieren sich die Beträge der führenden Ordnung, d.h. des skalaren Quarkkondensats, auf etwa 94%.

Eine korrekte Partialwellenanalyse ist mit nicht unerheblichem Aufwand verbunden, daher werden in dieser Arbeit Wirkungsquerschnittsdaten – gewonnen aus

den Reaktionen  $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$  und  $\pi^+p \rightarrow K^+K^-\Delta^{++}$  [P+73] – zur Anpassung der LEC verwendet. Die Ausführungen des Abschnitts 4.2 gelten jedoch für allgemeine Streuamplituden und sind daher universell anwendbar. Ein Vergleich mit anderen Arbeiten wird jedoch erschwert, da in neueren Publikationen primär Partialwellenanalysen verwendet werden.

## 4.1 S-Matrix und LSZ-Reduktion

Physikalisch interessante Größen wie die Streuamplitude lassen sich aus Übergangswahrscheinlichkeiten von jeweils zwei Pionen im Anfangs- und Endzustand berechnen. Diese Übergangswahrscheinlichkeit lautet

$$P(\mathcal{AB} \rightarrow \mathcal{CD}) = \left| \langle \pi_{\mathcal{C}}\pi_{\mathcal{D}} | \pi_{\mathcal{A}}\pi_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} \right|^2, \quad (4.1)$$

wobei die *in*-Zustände einem Zweiteilchenzustand in ferner Vergangenheit, die *out*-Zustände der fernen Zukunft entsprechen. Den Ausführungen eines jeden modernen Lehrbuches über Quantenfeldtheorie – beispielsweise [PS95] oder [Ryd06] – folgend ist es möglich, diese Wahrscheinlichkeit mit einer idealisierten Übergangsamplitude asymptotisch definierter Impulszustände,  $\langle \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}}$ , zu verknüpfen. Für deren Überlappung gilt

$$\langle \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}} = \langle \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4; t \rightarrow \infty | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2; t \rightarrow -\infty \rangle \equiv \langle \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 | S | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rangle,$$

wodurch die sogenannte S-Matrix, der unitäre Grenzfall eines Zeitevolutionsoperators, definiert wird. Diese Matrix kodiert die gesamte für die Teilchenstreuung relevante Information und ist somit Kernstück einer quantenfeldtheoretischen Rechnung. Der Spezialfall einer ausbleibenden Wechselwirkung der ein- und auslaufenden Teilchen wird durch die Parametrisierung

$$S = \mathbb{1} + i\mathcal{T} \quad (4.2)$$

berücksichtigt, die den eigentlich interessanten Teil, die Streumatrix  $\mathcal{T}$ , definiert. Jeder physikalische Prozess ist der Impulserhaltung unterworfen, daher sollte  $\mathcal{T}$  eine impulserhaltende Delta-Distribution beinhalten. Das invariante Streumatrixelement  $\mathcal{M}$  lässt sich darauf hin gemäß

$$\langle \mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 | i\mathcal{T} | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) \quad (4.3)$$

definieren. Diese Zerlegung trennt dynamische von kinematischen Strukturen. Von jetzt an wird durchgängig von vier einlaufenden Impulsen die Rede sein, die tatsächliche Wahl der Strahl- sowie der Streuteilchen wird durch die Nullkomponenten

der Impulse festgelegt; positive Energie für einlaufende, negative für auslaufende Teilchen.

Die Verbindung zwischen Streumatrix und Green'schen Vierpunktfunktionen wird durch die sogenannte LSZ-Reduktionsformel, benannt nach Lehmann, Symanzik und Zimmermann [Wei95; PS95; Ryd06], hergestellt. Diese lautet für den Fall der Streuung von zwei nach zwei Teilchen

$$\langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | i \mathcal{T} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \times \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} \sqrt{R_3} \sqrt{R_4} G_{\text{amp}}^{\text{ohne } \mathbb{1}}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (4.4)$$

wobei die  $R_j$  die Wellenfunktionsrenormierungskonstanten bezeichnen und dem Residuum des vollständigen Propagators des jeweiligen Teilchens entsprechen.  $G_{\text{amp}}^{\text{ohne } \mathbb{1}}$  ist die amputierte Green'sche Funktion ohne Identität und äußere Teilchenlinien.

Vergleich mit Gleichung (4.3) liefert für das invariante Matrixelement  $\mathcal{M}$  im Spezialfall der Pionenstreuung mit vier identischen Teilchen

$$\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = R_\pi^2 G_{\text{amp}}^{\text{ohne } \mathbb{1}}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (4.5)$$

oder die diagrammatische Entsprechung

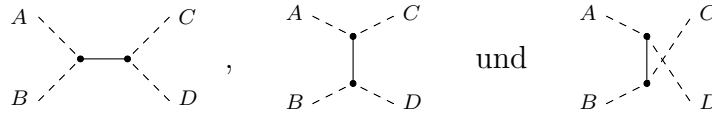
$$\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4) = \begin{array}{c} \sqrt{R_\pi} \quad \text{---} \quad \sqrt{R_\pi} \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \sqrt{R_\pi} \quad \text{---} \quad \sqrt{R_\pi} \end{array}.$$

Der schwarze Vertex steht anschaulich für die Summe aller Einschleifendiagramme mit vier äußeren Pionenlinien, jedoch ohne äußere Pionenpropagatoren. Genau diesen Vertex und somit das invariante Matrixelement  $\mathcal{M}$  gilt es zu berechnen.

Da, wie bereits im vorhergehenden Kapitel 3 ausführlich diskutiert, eine Renormierung der Schleifendiagramme vorgenommen wird, können im weiteren Verlauf  $R_\pi$ ,  $R_\rho$  und  $R_\sigma$ , abhängig von den gewählten Feldredefinitionskonstanten, eingesetzt und daher ignoriert werden.

## 4.2 Streudiagramme

In diesem Abschnitt wird die renormierte Streuamplitude aus den im vorhergehenden Kapitel renormierten Komponenten zusammengesetzt. Es ist darauf hinzuweisen, dass sämtliche in den Gleichungen (4.6), (4.7) und (4.8) genannten Diagrammgruppen aufgrund ihrer topologischen Struktur in Untergruppen, deren Elemente sich lediglich durch Wahl der äußeren Impulse bzw. Isospinindizes unterscheiden, aufgeteilt werden können. Beispielsweise bilden die drei Diagramme



eine gemeinsame Untergruppe, da sie zwar topologisch identisch, bezüglich der äußeren Impulse jedoch unterschiedlich indiziert sind. Die Anzahl der einer Untergruppe angehörenden Diagramme wird in dieser Arbeit Multiplizität  $M$  genannt.

Bezeichnen der schwarze Vertex  $G_{\text{amp}}^{\text{ohne } 1}$  und die grauen Vertizes die renormierten Diagrammkomponenten, so gilt

$$\mathcal{M} = \text{Kontakt} + \text{Rho} + \text{Sigma}. \quad (4.6)$$

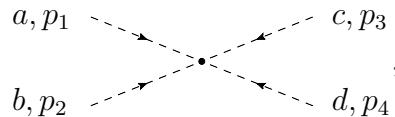
Die Kontaktdiagramme sind die in Gleichung (3.21) definierten und finden sich in Abbildung 4.1. Die Rho- und Sigmadigramme lassen sich wiederum in die einzelnen Teile

$$\text{Rho} = \text{Rhovertex} + \text{Rhopropagator} + \text{Rhovertex}, \quad (4.7)$$

$$\text{Sigma} = \text{Sigmapropagator} + \text{Sigmapropagator} + \text{Sigmapropagator}, \quad (4.8)$$

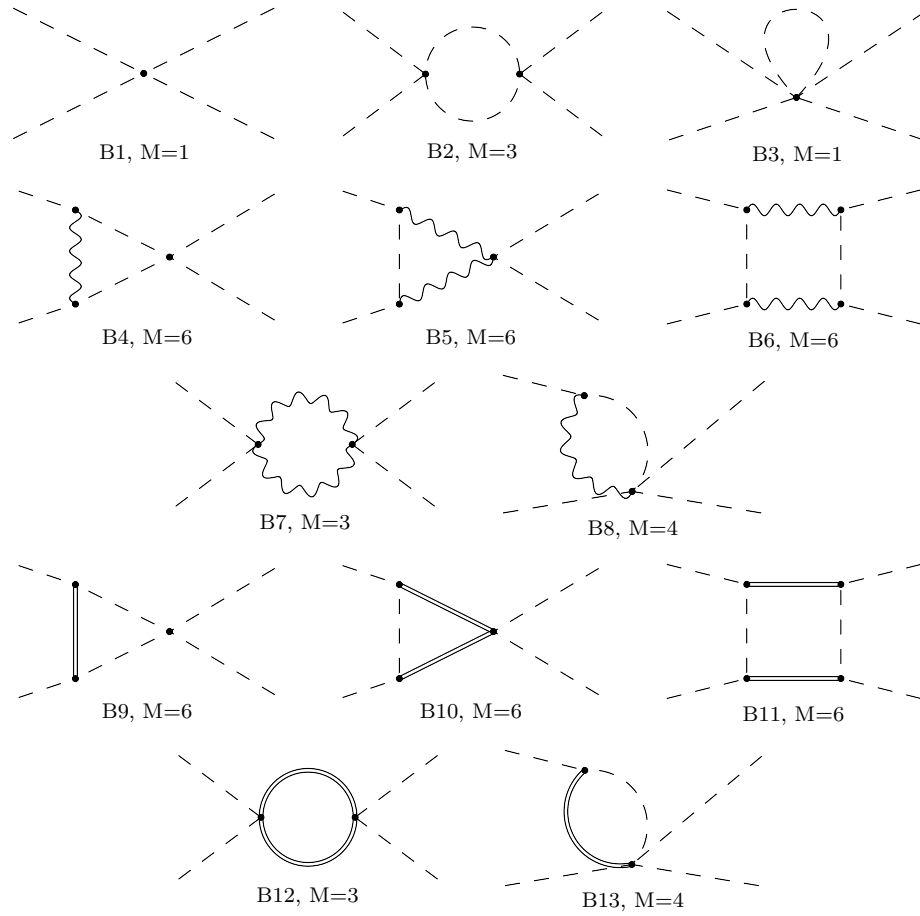
zerlegen. Hierbei bilden die beiden Rho- und Sigmapropagator-Gruppen jeweils eine einzige, da sie sich topologisch gleichen und an dieser Stelle nur zwecks besserer Nachvollziehbarkeit unterschieden wurden. Die vollständigen Rhovertex-Diagramme finden sich in Abbildung 4.2 und wurden in Gleichung (3.23) mit dem Ergebnis aus (3.24) renormiert. Abbildung 4.3 zeigt den vollständigen Satz an Sigmapropagator-Diagrammen, renormiert durch die Bedingung in Gleichung (3.25). Die beiden Propagatoren treten jeweils in drei Konfigurationen, analog dem oben genannten Beispiel zur Untergruppendefinition, auf und werden gemäß den Gleichungen (3.16) und (3.19) in einen freien Propagator sowie einen polfreien Anteil zerlegt.

Die (Isospin, Impuls)-Bezeichnung der äußeren Linien folgt der Konvention



welche eine allgemeine Parametrisierung der Streuamplitude  $\mathcal{M}$  gemäß

$$\mathcal{M} = T_{cdab} = T_1 \delta_{ad} \delta_{bc} + T_2 \delta_{ac} \delta_{bd} + T_3 \delta_{ab} \delta_{cd}$$

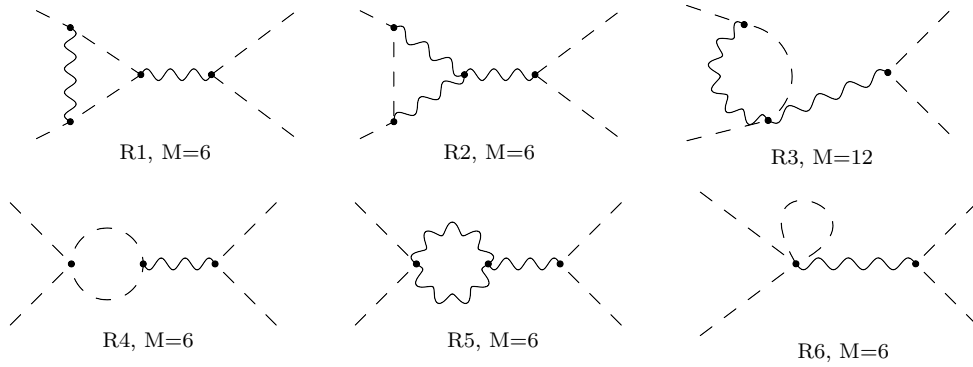


**Abbildung 4.1:** Einteilchenirreduzible Kontakt diagramme. Gestrichelte, Wellen- und Doppellinien stehen für Pionen, Rho- und Sigmesonen. B1 ist der  $4\pi$ -Vertex, welcher die Schleifendiagramme B2 bis B8 renormiert. B6 entspricht einem  $\mathcal{O}(q^4)$ -Vertex und wird daher ignoriert.

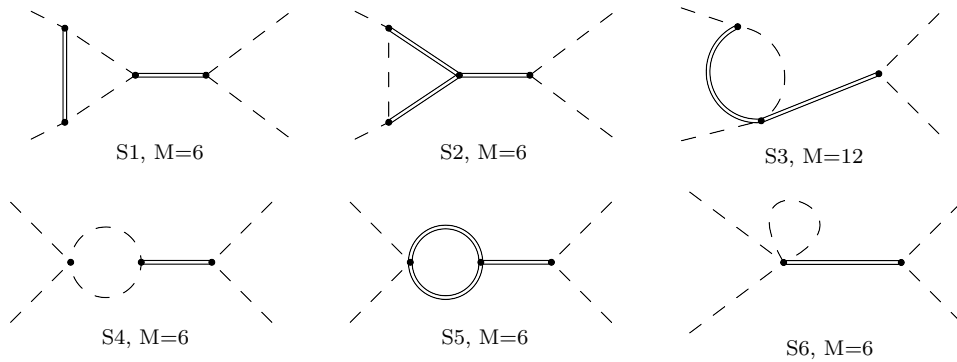
zulässt. Selektion eines zu untersuchenden Isospinkanals erfolgt durch Linearkombinationen der  $T_j$  nach den in Anhang B abgeleiteten Relationen, für die in dieser Arbeit relevante  $\pi^+\pi^-$ -Streuung also beispielsweise

$$\mathcal{M}(\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = T_2 + T_3. \quad (4.9)$$





**Abbildung 4.2:** Rhovertex-Diagramme. Gestrichelte bzw. Wellenlinien stehen für Pionen resp. Rhomesonen.



**Abbildung 4.3:** Sigmax-vertex-Diagramme. Gestrichelte bzw. Doppellinien stehen für Pionen resp. Sigamesonen.

### 4.3 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts betrachtet man je zwei ein- und auslaufende Teilchen im Schwerpunktsystem. Sämtliche Impulse sind einlaufend gewählt, die Unterscheidung von Teilchen im Anfangs- und Endzustand wird durch das Signum der Nullkomponente des Impulses vorgenommen. Da man es hier mit vier Pionen zu tun hat, wählt man die explizite Kinematik

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \mathbf{p}_1) = (E(p), \mathbf{p}), & p_2 &= (E_2, \mathbf{p}_2) = (E(p), -\mathbf{p}), \\ p_3 &= (E_3, \mathbf{p}_3) = (-E(p'), -\mathbf{p}'), & p_4 &= (E_4, \mathbf{p}_4) = (-E(p'), \mathbf{p}'), \end{aligned}$$

wobei von der Massenschalenbedingung  $p^2 = M^2 \Rightarrow E^2(p) = M^2 + \mathbf{p}^2$  sowie  $p = |\mathbf{p}|$  Gebrauch gemacht wird. Die Teilchen 1 und 2 sind streu-, 3 und 4 gestreute Pionen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist bekannt [PS95; Ryd06; GSS07] und lautet

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}{8\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M^4}} \frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} |\mathcal{M}(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2.$$

Definiert man als kinematische Freiheitsgrade die üblichen Mandelstamvariablen,

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2,$$

und verwendet die Massenschalenbedingung, kombiniert mit der Impulserhaltung, so lassen sich die im differentiellen Wirkungsquerschnitt auftretenden Phasenraumintegrale teilweise berechnen (vgl. Abschnitt C.1); es folgt

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2 s} |\mathcal{M}(s, \cos \theta)|^2 d\Omega, \quad (4.10)$$

mit dem  $\mathbf{p}_1$ - $\mathbf{p}_3$ -Winkel  $\theta$ . Aufgrund der sehr komplizierten Struktur des invarianten Matrixelements ist an dieser Stelle eine analytische Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts nicht möglich. Dieser lässt sich jedoch in der numerisch zu integrierenden Form

$$\sigma(s) = \frac{1}{64\pi s} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) |\mathcal{M}(s, \cos \theta)|^2 \quad (4.11)$$

als Funktion der kinematischen Variable  $s$  angeben.

# Kapitel 5

## Ergebnisse

Nachdem mit den bisherigen Überlegungen die renormierte Streuamplitude bestimmt und mit dem Wirkungsquerschnitt verknüpft wurde, werden in diesem Kapitel die abschließenden numerischen Berechnungen und Parameterregressionen diskutiert. Verwendet wurde das Computeralgebrasystem *Mathematica* mit den hierfür geschriebenen Paketen *FeynCalc*, *LoopTools* und *FeynArts* [MBD91; KEM92; HPV99].

Wegen der komplizierten analytischen Struktur des Wirkungsquerschnitts gestaltete sich die Berechnung einer nur von den freien Parametern abhängenden Funktion  $\sigma(s)$  im höchsten Maße nicht-trivial und rechenintensiv. Weitere Anmerkungen zum verwendeten Algorithmus finden sich in Anhang C.2.

### 5.1 Parameterregression

Die durch Regression einzustellenden Variablen lassen sich in die vier Gruppen

	Rho	Sigma
Baumdiagramme	$c_x$	$\kappa_1, \kappa_2$
Schleifendiagramme	$c_x, d_x, \delta F$	$\kappa_1, \kappa_2$

einteilen. Während in den Rho-Schleifendiagrammen sämtliche Konstanten, die sich aus der Vektormesonlagrangedichte ergeben, beinhaltet sind, ist der Parametersatz der Sigmapesonen deutlich eingeschränkt. Bis auf  $\delta F$  werden alle Parameter reell angenommen. Da für diese Arbeit die Regression mit einem nichtlinearen  $\chi^2$ -Test [AS64; PFTV92] durchgeführt wurde, bestand prinzipiell die Möglichkeit, dass sich bei gleichzeitiger Variation mehrerer Parameter deren Werte gegenseitig kompensieren und somit nicht verlässliche Aussagen getroffen werden können. Um diesem Problem zu begegnen, werden zwei verwendete Regressionsreihenfolgen vorgestellt. Begonnen wird in beiden Fällen mit der Anpassung des Parameters  $c_x$  durch die Rho-Baumdiagramme, gefolgt von:

- M1: Anpassen von  $d_x$  und  $\delta F$  an Rho-Schleifendiagramme mit anschließender Regression von  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  durch zusätzliche Sigmaschleifen;  
 M2: Anpassen von  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  an Rho- & Sigma-Baumdiagramme mit anschließender  $d_x$ - und  $\delta F$ -Fixierung.

Durch Verwenden der Baumdiagramme zur Anpassung des Parameters  $c_x$ , der in dieser Form unverändert in die Schleifenrechnung übernommen wird, entsteht ein systematischer Fehler, der jedoch durch folgende Überlegung als nicht signifikant eingestuft werden kann: Der Wert einer jeden Kopplungskonstante ist – obgleich nicht bekannt – durch die QCD festgelegt und lässt sich gemäß

$$c_x^{\text{QCD}} = c_x^{\text{Baum}} + \hbar c_x^{(1)} + \hbar^2 c_x^{(2)} + \dots = c_x^{\text{Baum}} + \mathcal{O}(\hbar)$$

in Schleifen entwickeln. Da der Baumdiagrammwert bis auf Einschleifenniveau mit dem QCD-Wert übereinstimmt, ist es für eine Einschleifenrechnung irrelevant, ob  $c_x^{\text{QCD}}$  oder  $c_x^{\text{Baum}}$  verwendet wird, da deren Diskrepanz nur Störungen höherer Ordnung ausmachen kann.

Wird die Regression schließlich mit Hilfe von experimentellen Daten aus [P+73] und unter Verwendung der Konstanten

$$\begin{aligned} M_{\text{ph}} &= 0.139 \text{ GeV}, & m_{\text{ph}} &= (0.770 + i0.075) \text{ GeV}, \\ \mathbf{m}_{\text{ph}} &= (0.450 + i0.250) \text{ GeV}, & F &= 0.092 \text{ GeV} \end{aligned}$$

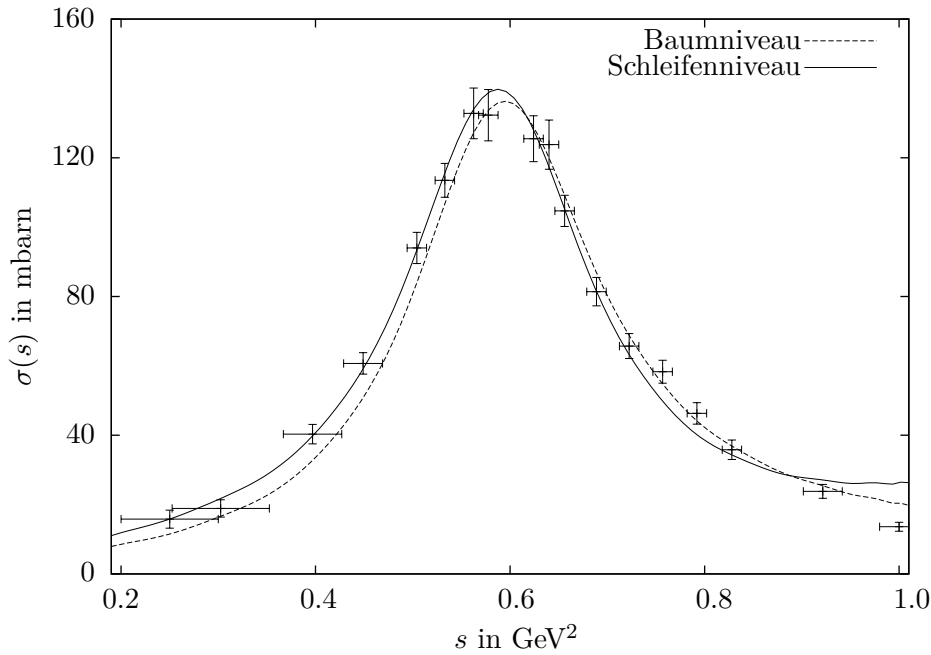
[A+08] durchgeführt, so erhält man für die Rhoparameter die Zahlenwerte

	$c_x$	$d_x$	$\delta F$
M1	$7.09 \pm 0.14$	$0.64 \pm 0.05$	$(0.10 \pm 0.01 + 0.05i \pm 0.02i) \text{ GeV}$
M2	$7.09 \pm 0.14$	$0.64 \pm 0.05$	$(0.10 \pm 0.01 + 0.05i \pm 0.02i) \text{ GeV}$

für die Sigmaparameter

	$\kappa_1$	$\kappa_2$
M1	$(6.62 \pm 5.96) \text{ GeV}^{-1}$	$(4.70 \pm 3.97) \text{ GeV}^{-1}$
M2	$(2.66 \pm 0.97) \text{ GeV}^{-1}$	$(9.04 \pm 1.21) \text{ GeV}^{-1}$

Offensichtlich sind die das Rhomeson betreffenden Anpassungen sehr stabil bezüglich der verwendeten Methode, d.h. die Regressionsreihenfolge spielt für  $c_x$ ,  $d_x$  und  $\delta F$  keinerlei Rolle. Die Sigmaparameter reagieren jedoch recht empfindlich auf die verwendete Vorgehensweise und sind darüber hinaus mit großen Fehlern behaftet, wodurch sich darauf schließen lässt, dass die Beiträge des Sigmaparameters zum Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  sehr gering sind (vgl. Abschnitt 5.3). Sämtliche Fehler der Parameter bedingen im Extremfall eine etwa 5%ige Ungenauigkeit der Peakhöhe und sind somit vernachlässigbar.



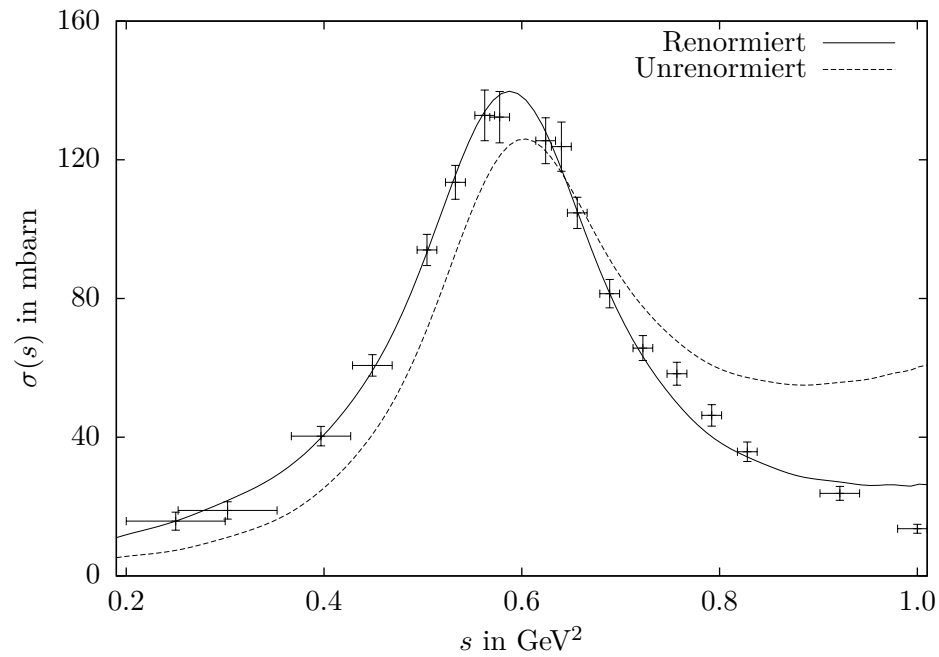
**Abbildung 5.1:** Wirkungsquerschnitte der  $\pi^+\pi^-$ -Streuung auf Baum- und Schleifenniveau.

Für sämtliche Visualisierungen wird, soweit nicht anders erwähnt, der generische Parametersatz

$$\text{gen} := (c_x = 7.09, d_x = 0.64, \delta F = 0.10 + 0.05i, \kappa_1 = 4.50, \kappa_2 = 6.50) \quad (5.1)$$

verwendet, wobei  $d_x$  und  $\delta F$  ausschließlich in Schleifenordnungen auftreten.

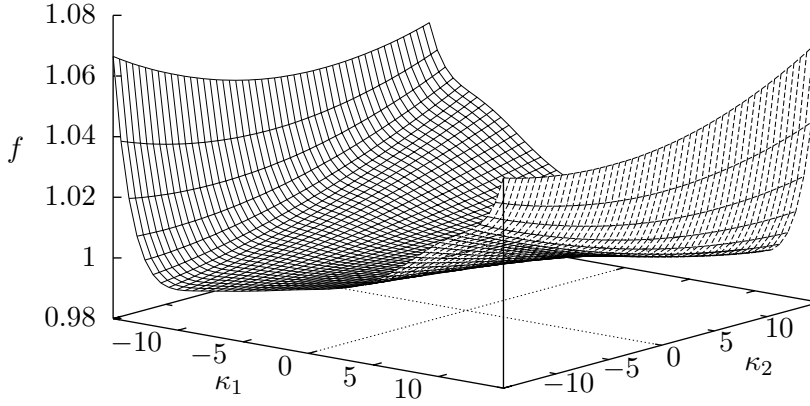
Der Graph in Abbildung 5.1 zeigt die berechneten Wirkungsquerschnitte, aufgetragen in mbarn gegen  $\text{GeV}^2$ , sowohl auf dem Baum- als auch auf dem Einschleifenniveau. Primär im mittleren energetischen Bereich, zwischen  $0.4 \text{ GeV}^2$  und  $0.7 \text{ GeV}^2$ , ist eine leichte Verbesserung der Schleifenrechnung gegenüber der einfachen Baumniveaurechnung auszumachen, was durchaus als Erfolg angesehen werden kann. Für Energien ab  $0.9 \text{ GeV}^2$  bricht der Gültigkeitsbereich der Theorie augenscheinlich zusammen, da die Messpunkte von der theoretischen Vorhersage abweichen. Dies kann jedoch teilweise durch die polynomiale Approximation des Wirkungsquerschnitts begründet werden, die ebenfalls die leichten Fluktuationen des Funktionsgraphen bei höheren Energien erklärt.



**Abbildung 5.2:** Schleifendiagramme mit dem generischen Parametersatz (renormiert) und der Modifikation  $\delta F = 0$  (unrenormiert).

## 5.2 Renormierungsbeiträge

Um die Relevanz der Renormierung der Pionzerfallskonstante  $F$  zu bestätigen, finden sich in Abbildung 5.2 Graphen des vollständig renormierten Wirkungsquerschnitts sowie der Modifikation  $\delta F = 0$ . Es ist offensichtlich, dass für eine korrekte Beschreibung experimenteller Daten die  $\delta F$ -Beiträge unerlässlich sind, da sonst, zumindest im Energiebereich ab  $0.7 \text{ GeV}^2$ , kaum Übereinstimmung von Theorie und Experiment erreicht werden kann.



**Abbildung 5.3:** Gemäß Gleichung (5.2) normierte Peakhöhe für  $s = 0.6 \text{ GeV}^2$  und variablen Kopplungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ .

### 5.3 Sigmamesonbeiträge

Zur Quantifikation der Sigmamesonbeiträge ist in Abbildung 5.3 der auf den Peak normierte Wirkungsquerschnitt, abhängig von den Konstanten  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , für den kinematischen Punkt  $s = 0.6 \text{ GeV}^2$  gemäß

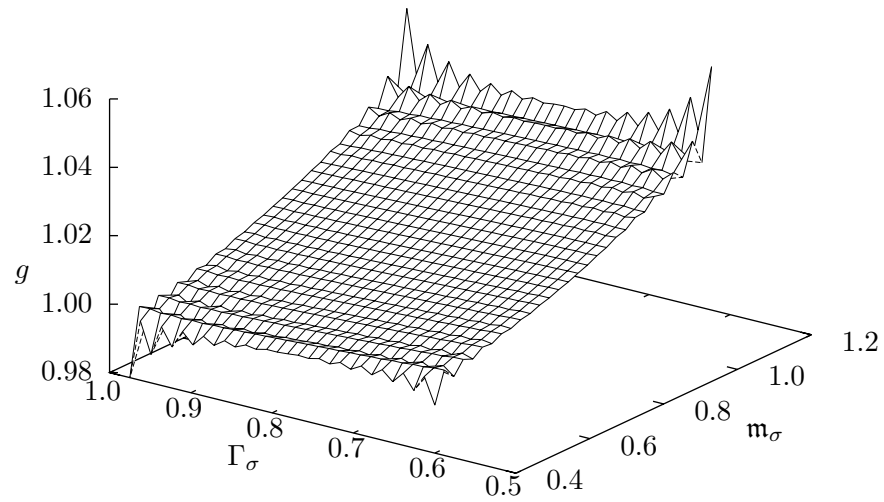
$$f(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{\sigma(\kappa_1, \kappa_2)}{\sigma(\text{gen})} \Big|_{s=0.6 \text{ GeV}^2} \quad (5.2)$$

eingetragen. Sogar für relativ große Werte der Kopplungskonstanten summieren sich die Sigmaanteile nur auf bis zu etwa 7%, daher werden die Beiträge selbst sowie die Größe der Konstanten als unwichtig angesehen.

Weiterhin spielen die Sigmamasse und -breite, wie in Abbildung 5.4 ersichtlich, keine gravierende Rolle. Eingetragen ist wiederum ein entsprechend

$$g(\mathbf{m}_\sigma, \Gamma_\sigma) = \frac{\sigma(\mathbf{m}_\sigma, \Gamma_\sigma)}{\sigma(\text{gen})} \Big|_{s=0.6 \text{ GeV}^2} \quad (5.3)$$

normierter Wirkungsquerschnitt auf einem  $16 \times 16$ -Raster möglicher Massen und Breiten. Generell ist zwar eine Tendenz zu größeren Beträgen für größere Werte



**Abbildung 5.4:** Gemäß Gleichung (5.3) normierte Peakhöhe auf einem  $16 \times 16$ -Raster möglicher Sigamassen und -breiten.

auszumachen, diese beläuft sich jedoch ebenfalls auf gerade einmal bis zu 6% und spielt keine Rolle.

Abschließend lässt sich sagen, dass der Einbau des Sigamemesons für die Beschreibung des Wirkungsquerschnitts der  $\pi^+\pi^-$ -Streuung keine nennenswerten Vorteile bietet.



# Kapitel 6

## Problem der Mehrfachzählung

Vom expliziten Einbau von Resonanzen in die  $\chi$ PT verspricht man sich eine Vergrößerung des Konvergenzbereichs hin zu höheren Energien. Jedoch muss an dieser Stelle, um Konsistenz zu gewährleisten, das Problem der Mehrfachzählung (*double counting*) einzelner Resonanzen untersucht werden. Betrachtet man eine Zwei-Nach-Zwei-Pionen-Streuamplitude in einer rein pionischen  $\chi$ PT, so sollte diese in ihrem Gültigkeitsbereich keinerlei Singularitäten aufweisen, da dies auf nicht eingebaute Resonanzen hindeuten würde. Bindet man jedoch beispielsweise das Rhomeson explizit ein, so müsste sich der Konvergenzradius der Theorie dahingehend verbessern, dass Singularitäten, wenn überhaupt, erst jenseits einer – im Vergleich zur pionischen  $\chi$ PT größeren – Schwelle auftreten.

Untersucht wird dieses Problem durch eine Streuamplitude, die durch eine unendliche Anzahl von s-Kanal-Pionenschleifen iterativ berechnet wird, um Effekte höherer Ordnung mit zu berücksichtigen. Resonanzen sollten als Singularitäten in dieser Amplitude in Erscheinung treten.

### 6.1 S-Kanal-Pionenschleifen

Die s-Kanal-Amplitude wird durch Summation einiger in Frage kommender s-Kanal-Diagramme berechnet. Schematisch entspricht dies der Iteration

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \\
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Benennt man die vier einlaufenden Impulse mit  $p_1$  bis  $p_4$  und versieht deren Linien mit den Isospinindizes  $a$  bis  $d$ , so lautet der einfache Vierpionenvertex (oder das

Streupotential),

$$\begin{aligned}
 V_{cdab}(p_3, p_4, p_1, p_2) &= \frac{iC_K}{3F^2} \left\{ \delta_{ad}\delta_{bc} (-p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4 + 2p_2 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4) \right. \\
 &\quad + \delta_{ac}\delta_{bd} (-p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_4 - p_2 \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4) \\
 &\quad \left. + \delta_{ab}\delta_{cd} (2p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_4 - p_2 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 + 2p_3 \cdot p_4) \right\} \\
 &\quad + \frac{iC_M M^2}{3F^2} \left\{ \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ab}\delta_{cd} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Für den Parametersatz  $C_K = 1$  und  $C_M = 1$  erhält man den rein pionischen Vertex, für  $C_K = -1/2$  und  $C_M = 1$  den Vertex mit expliziten Rhomesonfreiheitsgraden. Die Übersetzung der Gleichung (6.1) in einen algebraischen Ausdruck lautet

$$\begin{aligned}
 T_{cdab}(p_3, p_4, p_1, p_2) &= V_{cdab}(p_3, p_4, p_1, p_2) + \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} V_{cdxy}(p_3, p_4, k, p-k) \\
 &\quad \times G^{xvyw}(k, p-k) T_{vwab}(-k, -p+k, p_1, p_2),
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

wobei die Abkürzung  $p = p_1 + p_2 = -p_3 - p_4$  sowie die Propagatoren

$$G^{xvyw}(k, p-k) = \frac{i\delta^{xv}}{k^2 - M^2 + i0^+} \frac{i\delta^{yw}}{(p-k)^2 - M^2 + i0^+}$$

verwendet wurden. Die Isospinstruktur des Streupotentials  $V$  und der Streuamplitude  $T$  lässt die bereits bekannte Parametrisierung

$$\begin{aligned}
 V_{cdab} &= V_1 \delta_{ad}\delta_{bc} + V_2 \delta_{ac}\delta_{bd} + V_3 \delta_{ab}\delta_{cd}, \\
 T_{cdab} &= T_1 \delta_{ad}\delta_{bc} + T_2 \delta_{ac}\delta_{bd} + T_3 \delta_{ab}\delta_{cd}
 \end{aligned}$$

zu, welche – nach Einsetzen in Gleichung (6.3) – vereinfacht

$$\begin{aligned}
 T_1 &= V_1 + V_1 G T_2 + V_2 G T_1, \\
 T_2 &= V_2 + V_1 G T_1 + V_2 G T_2, \\
 T_3 &= V_3 + V_1 G T_3 + V_2 G T_3 + V_3 G T_1 + V_3 G T_2 + 3V_3 G T_3
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

liefert. Mit den Streuamplituden physikalischen Isospins  $T^{(I)}$  folgt

$$T^{(2)} = T_2 + T_1, \quad T^{(1)} = T_2 - T_1, \quad T^{(0)} = T_1 + T_2 + 3T_3$$

(vgl. Anhang B und insbesondere Gl. (B.1)), wodurch die Gleichungen (6.4) entkoppeln und sich schließlich in der sehr einfachen Form

$$T^{(I)} = V^{(I)} + V^{(I)} G T^{(I)} \tag{6.5}$$

zusammenfassen lassen; die  $V^{(I)}$  lauten explizit

$$\begin{aligned}
 V^{(2)} &= V_2 + V_1 = \frac{iC_K}{3F^2} \left( \frac{2C_M M^2}{C_K} - 2p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 \right. \\
 &\quad \left. + p_2 \cdot p_4 - 2p_3 \cdot p_4 \right), \\
 V^{(1)} &= V_2 - V_1 = \frac{iC_K}{F^2} (p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_4 - p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4), \\
 V^{(0)} &= V_1 + V_2 + 3V_3 = \frac{iC_K}{3F^2} \left( \frac{5C_M M^2}{C_K} + 4p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_3 \right. \\
 &\quad \left. - 2p_1 \cdot p_4 - 2p_2 \cdot p_3 - 2p_2 \cdot p_4 + 4p_3 \cdot p_4 \right).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Sowohl das Potential  $V$  als auch die Streuamplitude  $T$  lassen sich in einer Matrixform der Gestalt

$$\begin{aligned}
 V^{(I)} &= (p_3^\alpha, p_4^\beta, 1, p_3^\alpha p_4^\beta, 1) \mathcal{V}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(I)} (p_1^\mu, p_2^\nu, 1, p_1^\mu p_2^\nu, 1)^T, \\
 T^{(I)} &= (p_3^\alpha, p_4^\beta, 1, p_3^\alpha p_4^\beta, 1) \mathcal{T}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(I)} (p_1^\mu, p_2^\nu, 1, p_1^\mu p_2^\nu, 1)^T,
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

parametrisieren, wobei die  $\mathcal{V}$  aus (6.6) abzuleiten sind:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(2)} &= \frac{iC_K}{3F^2} \begin{pmatrix} g_{\alpha\mu} & g_{\alpha\nu} & 0 & 0 & 0 \\ g_{\beta\mu} & g_{\beta\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -2g_{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{C_M}{C_K} M^2 \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{V}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(1)} &= \frac{iC_K}{F^2} \begin{pmatrix} g_{\alpha\mu} & -g_{\alpha\nu} & 0 \\ -g_{\beta\mu} & g_{\beta\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \\
 \mathcal{V}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)} &= \frac{iC_K}{3F^2} \begin{pmatrix} -2g_{\alpha\mu} & -2g_{\alpha\nu} & 0 & 0 & 0 \\ -2g_{\beta\mu} & -2g_{\beta\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 4g_{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\frac{C_M}{C_K} M^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Diese  $\mathcal{V}^{(I)}$  und  $\mathcal{T}^{(I)}$  bilden hierbei ungeachtet der suggestiven Notation keinen Lorentztensor vierter Stufe. Einsetzen der Gleichung (6.7) in (6.5) liefert schließlich die  $5 \times 5$ -Matrixgleichung

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(I)} = \mathcal{V}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(I)} + \mathcal{V}_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(I)} \mathcal{G}^{\kappa\lambda\varphi\vartheta} \mathcal{T}_{\varphi\vartheta\mu\nu}^{(I)}, \tag{6.8}$$

mit dem Matrixpropagator

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}^{\kappa\lambda\vartheta} &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left( k^\kappa, p^\lambda - k^\lambda, 1, p^\kappa(p^\lambda - k^\lambda), 1 \right)^T G(k, p - k) \\
 &\quad \times \left( -k^\varphi, -p^\vartheta + k^\vartheta, 1, k^\varphi(p^\vartheta - k^\vartheta), 1 \right) \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11}^{\kappa\varphi} & \mathcal{G}_{12}^{\kappa\vartheta} & \mathcal{G}_{13}^\kappa & \mathcal{G}_{14}^{\kappa\varphi\vartheta} & \mathcal{G}_{15}^\kappa \\ \mathcal{G}_{21}^{\lambda\varphi} & \mathcal{G}_{22}^{\lambda\vartheta} & \mathcal{G}_{23}^\lambda & \mathcal{G}_{24}^{\lambda\varphi\vartheta} & \mathcal{G}_{25}^\lambda \\ \mathcal{G}_{31}^\varphi & \mathcal{G}_{32}^\vartheta & \mathcal{G}_{33} & \mathcal{G}_{34}^{\varphi\vartheta} & \mathcal{G}_{35} \\ \mathcal{G}_{41}^{\kappa\lambda\varphi} & \mathcal{G}_{42}^{\kappa\lambda\vartheta} & \mathcal{G}_{43}^{\kappa\lambda} & \mathcal{G}_{44}^{\kappa\lambda\varphi\vartheta} & \mathcal{G}_{45}^{\kappa\lambda} \\ \mathcal{G}_{51}^\varphi & \mathcal{G}_{52}^\vartheta & \mathcal{G}_{53} & \mathcal{G}_{54}^{\varphi\vartheta} & \mathcal{G}_{55} \end{pmatrix}. \tag{6.9}
 \end{aligned}$$

Komponentenweises Lösen von Gleichung (6.8) und Einsetzen in (6.7) liefert schließlich die nach Isospins sortierten Streuamplituden  $T^{(I)}$ .

## 6.2 Resonanzposition

Für den Isospinkanal  $I = 1$  folgt, mit den vereinfachenden Abkürzungen  $A = A_0(M^2)$  und  $B = B_0(s, M^2, M^2)$ ,

$$T^{(1)} = \frac{144i\pi^2 C_K (s + 2t - 4M^2)}{144\pi^2 F^2 + 12C_K M^2 - 2C_K s + 6C_K A + 3C_K (4M^2 - s) B}.$$

Der Pol dieser Amplitude für den Parametersatz des rein pionischen Vertex liegt – unter Verwendung des *modified minimal subtraction* Schemas der  $\chi$ PT – bei  $\sqrt{s} = (0.83 - 0.48i)$  GeV, der für die Parameter unter Berücksichtigung expliziter Rhomesonfreiheitsgrade bei  $\sqrt{s} = (1.61 + 1.6i)$  GeV. Offensichtlich besteht also das Problem der Mehrfachzählung nicht, da die modifizierte Streuamplitude erst jenseits des Gültigkeitsbereichs der Theorie eine nicht explizit eingebaute Resonanz erzeugt.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

In der hier vorliegenden Arbeit ist die Pionenstreuamplitude im Kontext einer lorentzinvarianten chiralen Störungstheorie unter expliziter Berücksichtigung resonanter Freiheitsgrade bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  berechnet worden. Die notwendige Renormierung fand durch das *complex-mass renormalization* Schema statt, welches den besonderen Charakteristika instabiler Teilchen Rechnung trägt [DD06; DDRW99; DDRW05].

Die Vektorfelddarstellung aus [EGL+89] konnte unter zusätzlicher Verwendung einiger Zwangsbedingungen [GS09] dazu verwendet werden, eine Rhomesonlagrangedichte zu entwickeln, die durch die Weinberg'sche Parametrisierung konsistent störungstheoretisch renormierbar ist. Eine sigmamesonische Lagrangedichte wurde aufgrund der einfachen skalar-isoskalaren Struktur aus einer Konfiguration primitiver Bausteine zusammengesetzt und mit der rein pionischen und rhomesonischen kombiniert. Weiterhin wurde neben einer ausführlichen Vorstellung der beiden geläufigen Renormierungsverfahren die Verwendung des CMR Schemas ausführlich legitimiert, da dies die Unitarität der Theorie *nicht* beeinträchtigt. Die anschließende Konstruktion der renormierten Pionenstreuamplitude lieferte schließlich einen polynomial approximierten, analytischen Ausdruck des Wirkungsquerschnitts, der durch Parameterregressionen mit experimentellen Daten aus [P+73] in Einklang gebracht werden konnte. Hierbei wurde zum Einen festgestellt, dass eine hervorragende Übereinstimmung von Theorie und Experiment erzielt werden kann, zum Anderen jedoch, dass die rein sigmamesonischen Einflüsse auf den Prozess  $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  vernachlässigbar gering sind.

Die hier vorgestellten Berechnungsmethoden sind sehr allgemeiner Natur, daher sollten – auch in anbetracht der zweifelhaften Sigmaergebnisse – weitergehende Analysen vorgenommen werden. Erstens ist eine exakte Partialwellenzerlegung der Isospinkanäle null und eins zur besseren Parametereinstellung wünschenswert. Die hierzu notwendige Streuamplitude liegt bereits in allgemeiner Form vor, so dass die Implementation weiterer Studien zwar zeitintensiv, jedoch prinzipiell einfach zu bewerkstelligen ist. Hierzu können modernere Datensätze anstelle der über 30 Jahre alten Wirkungsquerschnitte verwendet werden, was präziser abgestimm-

te Kopplungskonstanten zur Folge haben sollte. Weiterhin ist hiernach auch ein Vergleich mit anderen theoretischen Modellen möglich, da nahezu sämtliche Publikationen der jüngeren Vergangenheit Partialwellenanalysen zur Untersuchung der Pionenstreuung verwenden.

Zweitens ist eine exakte Überprüfung der KSRF-Relation auf Einschleifenniveau unter Berücksichtigung sämtlicher Gegenterme notwendig. In dieser Arbeit wurden Massengegenterme nicht explizit berechnet, da dies für die Bestimmung der Streuamplitude nicht notwendig war. Weiterhin wurde der Gegenterm der Pionzerfallskonstante ausschließlich durch Parameterregessionen festgelegt und nicht analytisch abgeleitet. Sollte eine korrekte Kalkulation mit den bisher erzielten Ergebnissen konsistent sein, würde damit die potentielle Leistungsfähigkeit des verwendeten Renormierungsschemas unterstrichen.

Drittens wäre – jedoch nur als untergeordneter Punkt – die Anwendung des Rho- und Sigameson-Zählschemas [DGKS09] mit anschließender Überprüfung der zugeordneten Wertigkeiten interessant, da dies aufgrund des erheblichen Aufwandes im Rahmen dieser Arbeit nicht stattgefunden hat.

Abschließend lässt sich sagen, dass – in Anbetracht der bisherigen Ergebnisse – die *complex-mass renormalization* in der mesonischen chiralen Störungstheorie unter expliziter Berücksichtigung instabiler Resonanzen ein leistungsfähiges Werkzeug darstellt, dessen weitere Exploration durchaus lohnenswert erscheint.

# Anhang A

## Notationen und Konventionen

In diesem Kapitel werden die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Notationen und Konventionen physikalischer Größen, Metriken, Generatoren usw. angegeben.

### A.1 Allgemeine Definitionen

Die Benennung der Teilchenmassen folgt der Nomenklatur

	Pion	Rho	Sigma
generisch	$M$	$m$	$\mathbf{m}$
unrenormiert	$M_0$	$m_0$	$\mathbf{m}_0$
renormiert	$M_R$	$m_R$	$\mathbf{m}_R$
physikalisch	$M_{\text{ph}}$	$m_{\text{ph}}$	$\mathbf{m}_{\text{ph}}$

Da eine unrenormierte Lagrangedichte eine reelle Funktion ist, sind die unrenormierten Massen ausschließlich reelle Parameter. Die renormierten und physikalischen Massen hingegen können durchaus komplex sein; es gilt

$$M_{\text{ph}} = M_{\pi} = 0.139 \text{ GeV},$$

$$m_{\text{ph}} = m_{\rho} - \frac{i}{2}\Gamma_{\rho} = (0.770 - i0.075) \text{ GeV},$$

$$\mathbf{m}_{\text{ph}} = \mathbf{m}_{\sigma} - \frac{i}{2}\Gamma_{\sigma} = (0.450 - i0.250) \text{ GeV},$$

wobei die Massen und Breiten des Rho- und Sigmapesons laut [A+08] einen gewissen Parameterbereich aufweisen und nicht exakt bekannt sind.

Die für sämtliche Lorentzskalarprodukte verwendete Minkowskimetrik verwendet für die Zeitkomponente ein positives Vorzeichen,

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Die Levi-Civita- oder Epsilontensoren in drei bzw. vier Dimensionen lauten

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i, j, k) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

resp.

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{für } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit der Heavyside'schen Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

lässt sich das zeitgeordnete Produkt quantenfeldtheoretischer Operatoren definieren gemäß

$$T(\phi(x), \phi(y)) = \Theta(x^0 - y^0) \phi(x) \phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \phi(y) \phi(x).$$

## A.2 Pauli- und Gell-Mann-Matrizen

Eine mögliche Darstellung der  $N^2 - 1$  Generatoren einer  $SU(N)$  sind hermitesche, spurlose  $N \times N$ -Matrizen. Im Falle der  $SU(2)$  die Paulimatrizen,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

für die  $SU(3)$  die Gell-Mann-Matrizen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \text{sowie} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die  $\tau_j$  erfüllen die Relationen

$$\left[ \frac{\tau_j}{2}, \frac{\tau_k}{2} \right] = i\varepsilon_{jkl} \frac{\tau_l}{2}, \quad \tau_j^2 = \mathbb{1}_{2 \times 2} \quad \text{und} \quad \{\tau_j, \tau_k\} = 2\delta_{jk},$$

woraus direkt

$$\tau_j \tau_k = i\varepsilon_{jkl} \tau_l + \delta_{jk}, \quad \text{Tr}\{\tau_j \tau_k\} = 2\delta_{jk}$$



folgt. Analog gilt für die  $\lambda_j$

$$\left[ \frac{\lambda_j}{2}, \frac{\lambda_k}{2} \right] = i f_{jkl} \frac{\lambda_l}{2} \quad \text{und} \quad \{\lambda_j, \lambda_k\} = \frac{4}{3} \delta_{jk} + 2 d_{jkl} \lambda_l$$

mit den total antisymmetrischen SU(3)-Strukturkonstanten  $f_{jkl}$  sowie den total symmetrischen  $d$ -Symbolen  $d_{jkl}$ . Die  $f_{jkl}$  lauten explizit

$jkl$	123	147	156	246	257	345	367	458	678	Rest
$f_{jkl}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0

### A.3 Skalare Integrale

Die verwendeten Bezeichnungen für skalare,  $n$ -dimensionale Integrale mit bis zu vier inneren Linien orientieren sich an den Definitionen des *Mathematica*-Paketes *FeynCalc* und lauten, mit generischen Massen  $m_j$  und Impulsen  $p_j$ , explizit

$$A_0(m_0^2) = -16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i0^+},$$

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = -16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} i \prod_{j=0}^1 \frac{1}{[(k - p_j)^2 - m_j^2]} \Big|_{p_0=0},$$

$$\begin{aligned} C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) \\ = -16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} i \prod_{j=0}^2 \frac{1}{[(k - p_j)^2 - m_j^2]} \Big|_{p_0=0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, (p_2 - p_3)^2, p_3^2, p_2^2, (p_1 - p_3)^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) \\ = -16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} i \prod_{j=0}^3 \frac{1}{[(k - p_j)^2 - m_j^2]} \Big|_{p_0=0}. \end{aligned}$$

Für den t'Hooft-Parameter  $\mu$  gilt hierbei natürlich  $\dim(\mu) = \dim(m)$ , der für numerische Berechnungen auf  $\mu = 1 \text{ GeV}$  gesetzt wurde. Mit den Definitionen

$$\lambda = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{n-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma_E + 1] \right\} \quad \text{und} \quad \Omega = \frac{p_1^2 - m_0^2 - m_1^2}{2m_0 m_1}$$

lassen sich die Integrale  $A_0$  und  $B_0$  analytisch schreiben als

$$A_0(m^2) = -16\pi^2 \left\{ 2m^2\lambda + \frac{m^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) \right\} \quad \text{und}$$

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = -16\pi^2 \left\{ 2\lambda + \frac{1}{8\pi^2} \ln\left(\frac{m_0}{\mu}\right) + \frac{1}{16\pi^2} \left[ -1 + \frac{p_1^2 - m_0^2 + m_1^2}{p_1^2} \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) + \frac{2m_0m_1}{p_1^2} F(\Omega) \right] \right\},$$

wobei die Funktion  $F$  definiert ist gemäß

$$F(\Omega) = \begin{cases} \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}) & \text{für } \Omega \leq -1, \\ \sqrt{1 - \Omega^2} \arccos(-\Omega) & \text{für } -1 \leq \Omega \leq 1, \\ \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}) - i\pi\sqrt{\Omega^2 - 1} & \text{für } 1 \leq \Omega. \end{cases}$$

Einige weitere hilfreiche Relationen sind

$$B_0(0, m_0^2, m_1^2) = \frac{A_0(m_0^2) - A_0(m_1^2)}{m_0^2 - m_1^2} \quad \text{und}$$

$$B_0(0, m^2, m^2) = \frac{A_0(m^2)}{m^2} - 1,$$

sowie für die  $\rho\pi\pi$ -Vertexfunktion im chiralen Grenzfall

$$C_0(0, m^2, 0, 0, m^2, m^2) = -\frac{\pi^2}{9m^2},$$

$$C_0(0, m^2, 0, m^2, 0, 0) = -\frac{\pi(\pi - 12i \ln(2))}{12m^2}.$$

# Anhang B

## Clebsch-Gordan-Zerlegung der Streuamplitude

Die Amplitude der Pionenstreuung ist ein invariantes Übergangsmatrixelement mit je zwei Pionen im Anfangs- und Endzustand, vereinfacht geschrieben in der Form  $\mathcal{M} = \langle \pi\pi | i\mathcal{T} | \pi\pi \rangle$ . Diese Streuamplitude kann entweder in eine physikalische oder eine kartesische Isospindarstellung zerlegt werden.

### B.1 Zweipionenzustände

Die physikalische Isospindarstellung beschreibt Pionen durch die dritte Komponente  $I_3$  ihres Isospins  $I$ , also durch  $I_3 = -1, 0, 1$ , bei einem Gesamtisospin von  $I = 1$ . Die kartesische Isospindarstellung ist diejenige, die in sämtlichen Lagrangedichten und somit auch Feynmanregeln verwendet wird und die Pionen einfach von eins bis drei durchnummeriert. Die Verknüpfung dieser beiden Darstellungen ist definiert über

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= |1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi_1\rangle + i|\pi_2\rangle), \\ |\pi^0\rangle &= |1, 0\rangle = |\pi_3\rangle, \\ |\pi^-\rangle &= |1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi_1\rangle - i|\pi_2\rangle), \end{aligned}$$

wobei man für ein physikalisches Pion die Schreibweise  $|\pi\rangle = |1, I_3\rangle$  gebraucht. Zweipionenzustände lassen sich durch direkte Multiplikation zweier Pionen in der physikalischen Form

$$|\pi\pi'\rangle = |\pi\rangle \otimes |\pi'\rangle = |1, I_3\rangle \otimes |1, I'_3\rangle = \sum_{I, M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & I \\ I_3 & I'_3 & M \end{pmatrix} |1, M\rangle,$$

mit dem Gesamtisospin  $I = 0, 1, 2$  sowie der dritten Komponente  $M = I_3 + I'_3$ , definieren. Die für die folgende Diskussion relevanten Zweipionenzustände sind

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle \quad \text{und} \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2,0\rangle. \end{aligned}$$

Kartesische Zweipionenzustände berechnen sich durch simples Multiplizieren gemäß

$$|\pi\pi'\rangle = |\pi\rangle \otimes |\pi'\rangle = \sum_j a_j |\pi_j\rangle \otimes \sum_k b_k |\pi_k\rangle = \sum_{j,k} a_j b_k |\pi_j\pi_k\rangle,$$

woraus für die oben genannten relevanten Zustände

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= \frac{1}{2} \left\{ |\pi_1\pi_1\rangle - i|\pi_1\pi_2\rangle + i|\pi_2\pi_1\rangle + |\pi_2\pi_2\rangle \right\} \quad \text{sowie} \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= |\pi_3\pi_3\rangle \end{aligned}$$

folgt.

## B.2 Streuamplitude

Die kartesische Darstellung der Streuamplitude lässt aufgrund ihrer algebraischen Struktur eine Parametrisierung in der Form

$$\langle \pi_c\pi_d | i\mathcal{T} | \pi_a\pi_b \rangle = T_{cdab} = T_1\delta_{ad}\delta_{bc} + T_2\delta_{ac}\delta_{bd} + T_3\delta_{ab}\delta_{cd}$$

zu. Die Isospinzerlegung folgt aus dem Wigner-Eckart-Theorem [Sak94] und lautet

$$\langle I', M' | i\mathcal{T} | I, M \rangle = T^{(I)}\delta_{I'I'}\delta_{MM'}.$$

Kombination dieser Relationen ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \langle \pi^+\pi^- | i\mathcal{T} | \pi^+\pi^- \rangle &= \left( \frac{\langle 2,0 |}{\sqrt{6}} + \frac{\langle 1,0 |}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 0,0 |}{\sqrt{3}} \right) i\mathcal{T} \left( \frac{|2,0\rangle}{\sqrt{6}} + \frac{|1,0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0,0\rangle}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{6}T^{(2)} + \frac{1}{2}T^{(1)} + \frac{1}{3}T^{(0)} \quad \text{und} \\ \langle \pi^+\pi^- | i\mathcal{T} | \pi^+\pi^- \rangle &= \frac{1}{4} \left( \langle \pi_1\pi_1 | + i\langle \pi_1\pi_2 | - i\langle \pi_2\pi_1 | + \langle \pi_2\pi_2 | \right) i\mathcal{T} \\ &\quad \times \left( |\pi_1\pi_1\rangle - i|\pi_1\pi_2\rangle + i|\pi_2\pi_1\rangle + |\pi_2\pi_2\rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \underbrace{\langle \pi_1\pi_1 | i\mathcal{T} | \pi_1\pi_1 \rangle}_{T_1+T_2+T_3} + \underbrace{\langle \pi_1\pi_1 | i\mathcal{T} | \pi_2\pi_2 \rangle}_{T_3} + \dots \right) \\ &= T_2 + T_3 \end{aligned}$$

sowie analog dazu

$$\begin{aligned}\langle \pi^0 \pi^0 | i\mathcal{T} | \pi^0 \pi^0 \rangle &= \frac{2}{3}T^{(2)} + \frac{1}{3}T^{(0)} = T_1 + T_2 + T_3, \\ \langle \pi^0 \pi^0 | i\mathcal{T} | \pi^+ \pi^- \rangle &= \frac{1}{3}T^{(2)} - \frac{1}{3}T^{(0)} = -T_3.\end{aligned}$$

Auflösen des so erhaltenen Gleichungssystems liefert schließlich die Transformationsvorschrift der Streuamplituden physikalischen und kartesischen Isospins:

$$\begin{aligned}T^{(2)} &= T_2 + T_1, \\ T^{(1)} &= T_2 - T_1, \\ T^{(0)} &= T_1 + T_2 + 3T_3.\end{aligned}\tag{B.1}$$

# Anhang C

## Berechnung des Wirkungsquerschnitts

### C.1 Phasenraumvolumen

Zwei ein- und auslaufende Pionen im Schwerpunktsystem lassen eine explizite Wahl der Kinematik in der Form

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \mathbf{p}_1) = (E(p), \mathbf{p}), & p_2 &= (E_2, \mathbf{p}_2) = (E(p), -\mathbf{p}), \\ p_3 &= (E_3, \mathbf{p}_3) = (-E(p'), -\mathbf{p}'), & p_4 &= (E_4, \mathbf{p}_4) = (-E(p'), \mathbf{p}') \end{aligned}$$

zu, wobei von der Massenschalenbedingung  $p^2 = M^2 \Rightarrow E^2(p) = M^2 + \mathbf{p}^2$  sowie der Definition  $p = |\mathbf{p}|$  Gebrauch gemacht wird. Die Teilchen 1 und 2 sind einlaufende, 3 und 4 auslaufende Pionen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt [PS95; Ryd06; GSS07] lautet

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2}{8\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M^4}} \frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4),$$

die Mandelstamvariablen sind definiert gemäß

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2$$

und lassen sich mit  $E' = E(p')$  sowie der impulserhaltenden Deltadistribution umschreiben zu

$$\begin{aligned} s &= s(E) = (p_1 + p_2)^2 = (2E)^2 \\ t &= t(E, E', p, p', \cos \theta) = (p_1 + p_3)^2 \\ &= (E - E')^2 - (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 = (E - E')^2 - p^2 - p'^2 - 2pp' \cos \theta \\ &= -2p(1 + \cos \theta) = \left(M^2 - \frac{s}{2}\right) (1 + \cos \theta) = t(p, \cos \theta). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Ausgehend vom oben genannten differentiellen Wirkungsquerschnitt ergibt sich

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}(s, t)|^2}{8\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M^4}} \delta^{(4)}\left(\sum p_j\right) \frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\
 &= \frac{|\mathcal{M}(s(E), t(E, E', p, p', \cos \theta))|^2}{8\sqrt{(M^2 + 2\mathbf{p}^2)^2 - M^4}} \frac{\delta^{(1)}(2E - 2E')}{(2\pi)^2 4E'^2} d\mathbf{p}' \\
 &\quad \times \underbrace{\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)}_{\mathbf{p}_4 \rightarrow -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}'} d\mathbf{p}_4 \\
 &= \frac{|\mathcal{M}(s(E), t(E, E', p, p', \cos \theta))|^2}{16pE} \frac{1}{2(2\pi)^2 4E'^2} d\Omega \\
 &\quad \times \delta^{(1)}\left(\frac{p^2 - p'^2}{E + E'}\right) p'^2 dp' \\
 &= \frac{|\mathcal{M}(s(E), t(E, E', p, p', \cos \theta))|^2}{16pE} \frac{E + E'}{2(2\pi)^2 4E'^2} \frac{1}{2p} d\Omega \\
 &\quad \times p'^2 \left\{ \delta^{(1)}(p - p') + \underbrace{\delta^{(1)}(p + p')}_{\geq 0} \right\} dp' \\
 &= \frac{|\mathcal{M}(s(E), t(p, \cos \theta))|^2}{128(2\pi)^2 E^2} d\Omega = \frac{|\mathcal{M}(s, \cos \theta)|^2}{128\pi^2 s} d\Omega,
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Massenschalenbedingung sowie Gleichung (C.1) verwendet wurden. Der totale Wirkungsquerschnitt, abhängig von der Mandelstamvariablen  $s$ , lässt sich durch explizite Winkelintegration berechnen. Der azimutale Winkel  $\phi$  ist hierbei noch analytisch, der Polarwinkel  $\theta$  jedoch nur numerisch zu integrieren.

$$\sigma(s) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{|\mathcal{M}(s, \cos \theta)|^2}{128\pi^2 s} = \frac{1}{64\pi s} \int_{-1}^1 dx |\mathcal{M}(s, x)|^2. \quad (\text{C.2})$$

## C.2 Algorithmus

Da der exakte analytische Ausdruck des Wirkungsquerschnitts zu kompliziert ist, um eine korrekte Parameterregression durchzuführen, ist es zweckmäßig, ihn durch eine Approximation zu vereinfachen. Das invariante Matrixelement  $\mathcal{M}$  lässt sich, mit den (reellen) Kopplungskonstanten  $g_j$  und den Linearkombinationen skalarer Integrale  $I$ , zerlegen in

$$\mathcal{M}(s, x) = \sum_j g_j I_j(s, x). \quad (\text{C.3})$$

Diese Trennung von Kopplung und Kinematik erlaubt eine Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts gemäß

$$\sigma(s) = \sum_{j,k} g_j g_k \int_{-1}^1 dx \frac{I_j^*(s, x) I_k(s, x)}{64\pi s}. \quad (\text{C.4})$$

Da *LoopTools* skalare Integrale numerisch an festgelegten, kinematischen Punkten berechnet, die Mandelstamvariable  $s$  jedoch einen unabhängigen Freiheitsgrad darstellt, war es notwendig, eine tabellarische Verknüpfung von Kinematik und Wirkungsquerschnitt herzustellen, welche daraufhin polynomial in der Form

$$\sigma(s) \approx \sigma^{\text{approx}}(s) = \sum_{j,k} g_j g_k \sum_l C_{l,j,k} s^l \quad (\text{C.5})$$

in einen approximativen Wirkungsquerschnitt umgewandelt werden konnte. Diese Vorgehensweise erlaubte die Verwendung standardisierter Regressionsalgorithmen ohne besondere Kenntnis der skalaren Integrale.

(Ergänzung vom 25. März 2010: Zur Approximation wurde ein Polynom 23ten Grades verwendet. Die Präzision dieses Polynoms wurde rein visuell durch gleichzeitiges Auftragen direkt berechneter und approximierter Wirkungsquerschnitte für diskrete kinematische Variablen überprüft und als hinreichend eingestuft.)

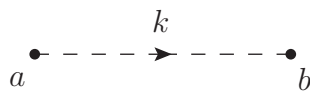


# Anhang D

## Feynmanregeln

In diesem Kapitel werden sämtliche für Einschleifenrechnungen relevanten Feynmanregeln aufgelistet. Gestrichelte, Wellen- bzw. Doppellinien stehen für Pionen, Rho- und Sigamesonen. Alle Impulse sind einlaufende.

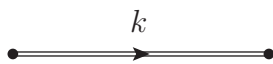
### D.1 Propagatoren



$$i\Delta_\pi(k) = \delta^{ab} \frac{i}{k^2 - M^2 + i0^+}$$

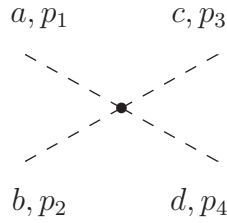


$$i\Delta_\rho(k) = -i\delta^{mn} \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}}{k^2 - m^2 + i0^+}$$



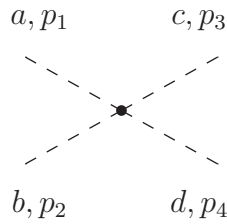
$$i\Delta_\sigma(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i0^+}$$

## D.2 Reiner Pionenvertex

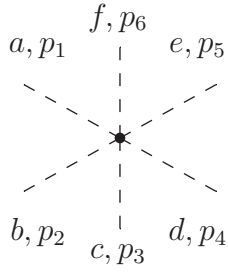


$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{3F^2} \left\{ \delta_{ad}\delta_{bc} (-p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2p_2 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4) \\
 & + \delta_{ac}\delta_{bd} (-p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_4 \\
 & \qquad \qquad \qquad - p_2 \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4) \\
 & + \delta_{ab}\delta_{cd} (2p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_4 \cdot \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - p_2 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 + 2p_3 \cdot p_4) \right\} \\
 & + \frac{iM^2}{3F^2} \left\{ \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ab}\delta_{cd} \right\}.
 \end{aligned}$$

## D.3 Vertizes mit expliziten rhomesonischen Freiheitsgraden



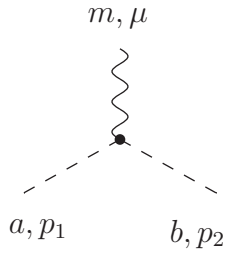
$$\begin{aligned}
 & -\frac{i}{6F^2} \left\{ \delta_{ad}\delta_{bc} (-p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2p_2 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4) \\
 & + \delta_{ac}\delta_{bd} (-p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_4 \\
 & \qquad \qquad \qquad - p_2 \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_4 - p_3 \cdot p_4) \\
 & + \delta_{ab}\delta_{cd} (2p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_4 \cdot \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - p_2 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_4 + 2p_3 \cdot p_4) \right\} \\
 & + \frac{iM^2}{3F^2} \left\{ \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ab}\delta_{cd} \right\}.
 \end{aligned}$$



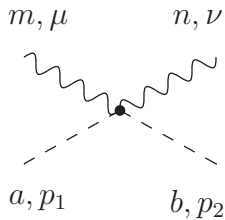
$$\frac{i}{45F^4} \left\{ \begin{aligned} &(-3M^2 + 4p_1 \cdot p_2 + 4p_1 \cdot p_3 \\ &+ 4p_1 \cdot p_4 - 16p_1 \cdot p_5 + 4p_1 \cdot p_6 \\ &+ 4p_2 \cdot p_3 + 4p_2 \cdot p_4 + 4p_2 \cdot p_5 \\ &- 16p_2 \cdot p_6 - 16p_3 \cdot p_4 + 4p_3 \cdot p_5 \\ &+ 4p_3 \cdot p_6 + 4p_4 \cdot p_5 + 4p_4 \cdot p_6 \\ &+ 4p_5 \cdot p_6) \delta_{ae} \delta_{bf} \delta_{cd} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} &+(e \rightarrow b, b \rightarrow e) + (e \rightarrow d, d \rightarrow e) + (e \rightarrow d, f \rightarrow e, d \rightarrow f) \\ &+(e \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow e) + (e \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow e) \\ &+(e \rightarrow f, f \rightarrow e) + (f \rightarrow d, d \rightarrow f) \\ &+(e \rightarrow c, f \rightarrow e, c \rightarrow d, d \rightarrow f) + (e \rightarrow b, b \rightarrow c, f \rightarrow e, c \rightarrow d, d \rightarrow f) \\ &+(e \rightarrow d, f \rightarrow c, c \rightarrow e, d \rightarrow f) + (e \rightarrow c, f \rightarrow d, c \rightarrow e, d \rightarrow f) \\ &+ \left( -3M^2 + 4p_1 \cdot p_2 + 4p_1 \cdot p_3 + 4p_1 \cdot p_4 + 4p_1 \cdot p_5 - 16p_1 \cdot p_6 + 4p_2 \cdot p_3 \right. \\ &\quad - 16p_2 \cdot p_4 + 4p_2 \cdot p_5 + 4p_2 \cdot p_6 + 4p_3 \cdot p_4 - 16p_3 \cdot p_5 + 4p_3 \cdot p_6 \\ &\quad \left. + 4p_4 \cdot p_5 + 4p_4 \cdot p_6 + 4p_5 \cdot p_6 \right) \delta_{bd} \delta_{ce} \\ &+(d \rightarrow c, c \rightarrow d) + (d \rightarrow c, c \rightarrow d, e \rightarrow f) \} \end{aligned}$$

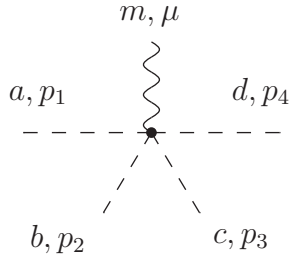
Die Ersetzungen ( $j \rightarrow k$ ) beziehen sich sowohl auf die Isospinindizes als auch die zugeordneten Impulse.



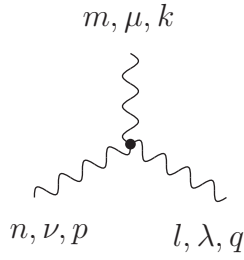
$$-(p_1^\mu - p_2^\mu) \varepsilon_{abm} \frac{c_x M^2 + m^2}{2gF^2}$$



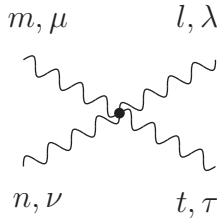
$$\begin{aligned} &\frac{ig(p_1^\mu p_2^\nu - p_1^\nu p_2^\mu) (\delta_{an} \delta_{bm} - \delta_{am} \delta_{bn}) d_x}{2F^2} \\ &- \frac{ig^{\mu\nu} \delta_{ab} \delta_{mn} M^2 c_x}{F^2} \end{aligned}$$



$$\frac{g}{6F^2} \left\{ (p_1^\mu - p_2^\mu) \delta_{cd} \varepsilon_{abm} + (p_1^\mu - p_3^\mu) \delta_{bd} \varepsilon_{acm} \right. \\ \left. + (p_1^\mu - p_4^\mu) \delta_{bc} \varepsilon_{adm} + (p_2^\mu - p_3^\mu) \delta_{ad} \varepsilon_{bcm} \right. \\ \left. + (p_2^\mu - p_4^\mu) \delta_{ac} \varepsilon_{bdm} + (p_3^\mu - p_4^\mu) \delta_{ab} \varepsilon_{cdm} \right\}$$

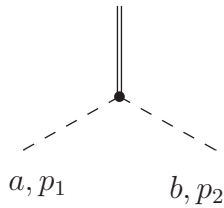


$$-g \left\{ (k^\lambda - p^\lambda) g^{\mu\nu} + (p^\mu - q^\mu) g^{\nu\lambda} \right. \\ \left. + (q^\nu - k^\nu) g^{\lambda\mu} \right\} \varepsilon_{mnl}$$

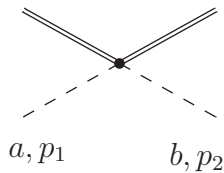


$$-ig^2 \left\{ (2g^{\lambda\tau} g^{\mu\nu} - g^{\mu\tau} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\tau\nu}) \delta_{lt} \delta_{mn} \right. \\ \left. + (2g^{\mu\tau} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\tau} - g^{\mu\nu} g^{\tau\lambda}) \delta_{ln} \delta_{mt} \right. \\ \left. + (2g^{\mu\lambda} g^{\nu\tau} - g^{\mu\tau} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} g^{\tau\lambda}) \delta_{lm} \delta_{nt} \right\}$$

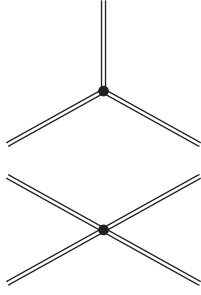
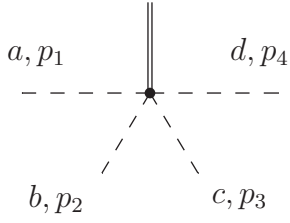
## D.4 Vertizes mit expliziten sigmamesonischen Freiheitsgraden



$$-i (\kappa_2 M^2 + \kappa_1 p_1 \cdot p_2) \delta_{ab}$$



$$-2i (\kappa_4 M^2 + \kappa_3 p_1 \cdot p_2) \delta_{ab}$$


 $iG_3$ 
 $iG_4$ 


$$\begin{aligned}
 & \frac{i\kappa_2 M^2 (\delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ab}\delta_{cd})}{3F^2} \\
 & - \frac{i\kappa_1}{3F^2} \left\{ (-2p_1 \cdot p_4 - 2p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \right. \\
 & \quad \left. + p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4) \delta_{ad}\delta_{bc} \right. \\
 & \quad \left. + (-2p_1 \cdot p_3 - 2p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_2 \right. \\
 & \quad \left. + p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3) \delta_{ac}\delta_{bd} \right. \\
 & \quad \left. + (-2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_3 \right. \\
 & \quad \left. + p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3) \delta_{ab}\delta_{cd} \right\}
 \end{aligned}$$

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Selbstenergiendiagramme des Pions . . . . .	25
3.2	Selbstenergiendiagramme des Rhomesons . . . . .	26
3.3	Selbstenergiendiagramme des Sigamesons . . . . .	28
3.4	$\rho\pi\pi$ -Vertexdiagramme . . . . .	30
3.5	$\sigma\pi\pi$ -Vertexdiagramme . . . . .	31
4.1	Einteilchenirreduzible Kontaktprogramme . . . . .	36
4.2	Rhovertex-Diagramme . . . . .	37
4.3	Sigmavertex-Diagramme . . . . .	37
5.1	Wirkungsquerschnitte auf Baum- und Schleifenniveau . . . . .	41
5.2	Renormierungsbeiträge . . . . .	42
5.3	Beiträge der Sigma-Kopplungen . . . . .	43
5.4	Beiträge der Sigmamasse und -breite . . . . .	44

# Literaturverzeichnis

- [A+08] C. Amsler et al.: *Review of Particle Physics*. Phys. Lett., **B667**:1, 2008.
- [AB69] S. L. Adler und W. A. Bardeen: *Absence of Higher Order Corrections in the Anomalous Axial Vector Divergence Equation*. Phys. Rev., **182**:1517, 1969.
- [ACGL01] B. Ananthanarayan, G. Colangelo, J. Gasser und H. Leutwyler: *Roy Equation Analysis of  $\pi\pi$  Scattering*. Phys. Rept., **353**:207, 2001.
- [Adl69] S. L. Adler: *Axial Vector Vertex in Spinor Electrodynamics*. Phys. Rev., **177**:2426, 1969.
- [Alt82] G. Altarelli: *Partons in Quantum Chromodynamics*. Phys. Rept., **81**:1, 1982.
- [AS64] M. Abramowitz und I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions with Formulae, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, 1964.
- [B+06] J. R. Batley et al.: *Observation of a Cusp-Like Structure in the  $\pi^0\pi^0$  Invariant Mass Distribution from  $K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\pi^0$  Decay and Determination of the  $\pi\pi$  Scattering Lengths*. Phys. Lett., **B633**:173, 2006.
- [BCE+96] J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser und M. E. Sainio: *Elastic  $\pi\pi$  scattering to two loops*. Phys. Lett., **B374**:210, 1996.
- [BCE+97] J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser und M. E. Sainio:  *$\pi\pi$  Scattering at Low Energy*. Nucl. Phys., **B508**:263, 1997.
- [Bir96] M. C. Birse: *Effective Chiral Lagrangians for Spin-1 Mesons*. Z. Phys., **A355**:231, 1996.
- [BJ69] J. S. Bell und R. Jackiw: *A PCAC Puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the Sigma Model*. Nuovo Cim., **A60**:47, 1969.
- [CCWZ69] C. G. Callan Jr., S. R. Coleman, J. Wess und B. Zumino: *Structure of Phenomenological Lagrangians 2*. Phys. Rev., **177**:2247, 1969.

- [CGL00] G. Colangelo, J. Gasser und H. Leutwyler: *The  $\pi\pi$  S-Wave Scattering Lengths*. Phys. Lett., **B488**:261, 2000.
- [CGL01a] G. Colangelo, J. Gasser und H. Leutwyler:  *$\pi\pi$  Scattering*. Nucl. Phys., **B603**:125, 2001.
- [CGL01b] G. Colangelo, J. Gasser und H. Leutwyler: *The Quark Condensate from  $K_{e4}$  Decays*. Phys. Rev. Lett., **86**:5008, 2001.
- [Col66] S. Coleman: *The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World*. Journal of Mathematical Physics, **7**:787, 1966.
- [Cre90] M. Creutz: *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge University Press, UK, 1990.
- [CWZ69] S. R. Coleman, J. Wess und B. Zumino: *Structure of Phenomenological Lagrangians 1*. Phys. Rev., **177**:2239, 1969.
- [DD06] A. Denner und S. Dittmaier: *The Complex-Mass Scheme for Perturbative Calculations with Unstable Particles*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., **160**:22, 2006.
- [DDRW99] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth und D. Wackerroth: *Predictions for all Processes  $e^+e^- \rightarrow 4\text{Fermions} + \gamma$* . Nucl. Phys., **B560**:33, 1999.
- [DDRW05] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth und L. H. Wieders: *Electroweak Corrections to Charged-Current  $e^+e^- \rightarrow 4\text{Fermion}$  Processes: Technical Details and Further Results*. Nucl. Phys., **B724**:247, 2005.
- [DGKS09] D. Djukanovic, J. Gegelia, A. Keller und S. Scherer: *Complex-Mass Renormalization in Chiral Effective Field Theory*. Phys. Lett., **B680**:235, 2009.
- [DGS10] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer: *Path Integral Quantization for Massive Vector Bosons*. arXiv:1001.1077v1, 2010.
- [Dou] M. Douglas: *Report on the Status of the Yang-Mills Millennium Prize Problem*. [http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills\\_Theory/](http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/), 06.11.2009, 0900h.
- [EGL+89] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich und E. de Rafael: *Chiral Lagrangians for Massive Spin-1 Fields*. Phys. Lett., **B223**:425, 1989.
- [FGML73] H. Fritzsch, Murray Gell-Mann und H. Leutwyler: *Advantages of the Color Octet Gluon Picture*. Phys. Lett., **B47**:365, 1973.



- [GL84] J. Gasser und H. Leutwyler: *Chiral Perturbation Theory to One Loop*. Ann. Phys., **158**:142, 1984.
- [GL85] J. Gasser und H. Leutwyler: *Low-Energy Expansion of Meson Form-Factors*. Nucl. Phys., **B250**:517, 1985.
- [GML60] M. Gell-Mann und M. Levy: *The Axial Vector Current in Beta Decay*. Nuovo Cim., **16**:705, 1960.
- [GMOR68] M. Gell-Mann, R. J. Oakes und B. Renner: *Behavior of Current Divergences under  $SU(3) \times SU(3)$* . Phys. Rev., **175**:2195, 1968.
- [Gol61] J. Goldstone: *Field Theories with Superconductor Solutions*. Nuovo Cim., **19**:154, 1961.
- [GS09] J. Gegelia und S. Scherer: *Private Mitteilung*. 2009.
- [GSS07] W. Greiner, S. Schramm und E. Stein: *Quantum Chromodynamics*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 2007.
- [GSW62] J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg: *Broken Symmetries*. Phys. Rev., **127**:965, 1962.
- [GW73a] D. J. Gross und F. Wilczek: *Asymptotically Free Gauge Theories 1*. Phys. Rev., **D8**:3633, 1973.
- [GW73b] D. J. Gross und F. Wilczek: *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*. Phys. Rev. Lett., **30**:1343, 1973.
- [HPV99] T. Hahn und M. Perez-Victoria: *Automatized One-Loop Calculations in Four and D Dimensions*. Comput. Phys. Commun., **118**:153, 1999.
- [JW] A. Jaffe und E. Witten: *Quantum Yang-Mills Theory*. [http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills\\_Theory/](http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/), 06.11.2009, 0900h.
- [KEM92] J. Kublbeck, H. Eck und R. Mertig: *Computeralgebraic Generation and Calculation of Feynman Graphs Using FeynArts and FeynCalc*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., **29A**:204, 1992.
- [KMSF95] M. Knecht, B. Moussallam, J. Stern und N. H. Fuchs: *The Low-Energy  $\pi\pi$  Amplitude to One and Two Loops*. Nucl. Phys., **B457**:513, 1995.
- [KOS61] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh und A. Salam: *Change of Variables and Equivalence Theorems in Quantum Field Theories*. Nucl. Phys., **28**:529, 1961.

- [KS66] K. Kawarabayashi und M. Suzuki: *Partially Conserved Axial Vector Current and the Decays of Vector Mesons*. Phys. Rev. Lett., **16**:255, 1966.
- [LP01] A. Lahiri und P. B. Pal: *A First Book of Quantum Field Theory*. Alpha Science Internat., Calcutta, 1. Auflage, 2001.
- [MBD91] R. Mertig, M. Bohm und A. Denner: *FeynCalc: Computer Algebraic Calculation of Feynman Amplitudes*. Comput. Phys. Commun., **64**:345, 1991.
- [MM97] I. Montvay und G. Münster: *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, UK, 1997.
- [MP78] W. J. Marciano und H. Pagels: *Quantum Chromodynamics: A Review*. Phys. Rept., **36**:137, 1978.
- [Nec07] S. Necco: *Determining QCD Low-Energy Couplings from Lattice Simulations*. PoS, LAT**2007**:021, 2007.
- [Noe18] E. Noether: *Invariante Variationsprobleme*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse:235, 1918.
- [P+73] S. D. Protopopescu et al.:  $\pi\pi$ -*Partial-Wave-Analysis from Reactions*  $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$  and  $\pi^+p \rightarrow K^+K^-\Delta^{++}$  at 7.1 GeV/c. Phys. Rev., **D7**:1279, 1973.
- [P+01] S. Pislak et al.: *A New Measurement of  $K_{e4}^+$  Decay and the S-Wave  $\pi\pi$ -Scattering Length  $a_0^0$* . Phys. Rev. Lett., **87**:221801, 2001.
- [P+03] S. Pislak et al.: *High Statistics Measurement of  $K_{e4}$  Decay Properties*. Phys. Rev., **D67**:072004, 2003.
- [PFTV92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky und W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, UK, 2. Auflage, 1992.
- [Pol73] H. D. Politzer: *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?* Phys. Rev. Lett., **30**:1346, 1973.
- [PRSZ09] B. Povh, K. Rith, C. Scholz und F. Zetsche: *Teilchen und Kerne*. Springer, Berlin, 8. Auflage, 2009.

- [PS95] M. E. Peskin und D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Band 5 der Reihe *The Advanced Book Program*. Westview Press, 1. Auflage, 1995.
- [RF66] Riazuddin und Fayyazuddin: *Algebra of Current Components and Decay Widths of  $\rho$  and  $K^*$  Mesons*. Phys. Rev., **147**:1071, 1966.
- [Rot05] H. J. Rothe: *Lattice Gauge Theories*. World Scientific, New Jersey, 3. Auflage, 2005.
- [Roy71] S. M. Roy: *Exact Integral Equation for  $\pi\pi$  Scattering Involving only Physical Region Partial Waves*. Phys. Lett., **B36**:353, 1971.
- [Ryd06] L. H. Ryder: *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, UK, 2. Auflage, 2006.
- [Sak69a] J. J. Sakurai: *Currents and Mesons*. University of Chicago Press, 1969.
- [Sak69b] J. J. Sakurai: *Vector Meson Dominance and High-Energy Electron Proton Inelastic Scattering*. Phys. Rev. Lett., **22**:981, 1969.
- [Sak94] J. J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.
- [Sch03] S. Scherer: *Introduction to Chiral Perturbation Theory*. Adv. Nucl. Phys., **27**:277, 2003.
- [Smi02] J. Smit: *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, UK, 2002.
- [tV72] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman: *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*. Nucl. Phys., **B44**:189, 1972.
- [War50] J. C. Ward: *An Identity in Quantum Electrodynamics*. Phys. Rev., **78**:182, 1950.
- [Wei66] S. Weinberg: *Pion Scattering Lengths*. Phys. Rev. Lett., **17**:616, 1966.
- [Wei68] S. Weinberg: *Nonlinear Realizations of Chiral Symmetry*. Phys. Rev., **166**:1568, 1968.
- [Wei73] S. Weinberg: *Nonabelian Gauge Theories of the Strong Interactions*. Phys. Rev. Lett., **31**:494, 1973.
- [Wei79] S. Weinberg: *Phenomenological Lagrangians*. Physica, **A96**:327, 1979.
- [Wei95] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, UK, 1995.