

# Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons in effektiver Feldtheorie

Diplomarbeit  
von  
Torsten Bauer

Institut für Kernphysik

Johannes Gutenberg-Universität Mainz

April 2009

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>QCD und chirale Störungstheorie</b>	<b>8</b>
2.1	QCD-Lagrangedichte . . . . .	8
2.2	Ward-Identitäten und lokale Symmetrien . . . . .	11
2.3	Chirale Störungstheorie . . . . .	14
2.3.1	Zählschema . . . . .	14
2.3.2	Mesonische Lagrangedichte . . . . .	15
2.3.3	Baryonische Lagrangedichte . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Renormierung</b>	<b>19</b>
3.1	Infrarotregularisierung . . . . .	20
3.2	EOMS-Renormierung . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Einbau von Resonanzen in die ChPT</b>	<b>24</b>
4.1	Einbau von Vektormesonen . . . . .	25
4.1.1	Lagrangedichte und Zwangsbedingungen . . . . .	25
4.1.2	Feldredefinition . . . . .	27
4.1.3	Zählschema . . . . .	29
4.2	Einbau der Deltaresonanz . . . . .	29
4.2.1	Freie Lagrangedichte . . . . .	30
4.2.2	Wechselwirkungslagrangedichten . . . . .	31
4.2.3	Zählschema . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons</b>	<b>34</b>
5.1	Definition der Formfaktoren . . . . .	34
5.2	Wellenfunktionsrenormierungskonstante . . . . .	36
5.2.1	Definition der WFRK . . . . .	36
5.2.2	Berechnung der WFRK . . . . .	37
5.3	Formfaktoren mit Vektormesonen als explizite Freiheitsgrade . . . . .	39
5.3.1	Bestimmung der Formfaktoren . . . . .	39

5.3.2	Ergebnisse der Formfaktoren . . . . .	44
5.3.3	Fehlerabschätzung . . . . .	47
5.4	Formfaktoren mit der Deltaresonanz als explizitem Freiheitsgrad	49
5.4.1	Bestimmung der Formfaktoren inklusive Deltaresonanz	49
5.4.2	Ergebnisse der Formfaktoren inklusive Deltaresonanz .	51
5.5	Ward-Takahashi-Identität . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Definitionen</b>	<b>62</b>
A.1	Pauli-Matrizen . . . . .	62
A.2	Gell-Mann-Matrizen . . . . .	63
A.3	Dirac-Matrizen . . . . .	64
A.4	Hypergeometrische Funktionen . . . . .	65
<b>B</b>	<b>Isospin</b>	<b>66</b>
<b>C</b>	<b>Feynmanregeln</b>	<b>67</b>
C.1	Propagatoren . . . . .	67
C.2	Vertizes . . . . .	68
<b>D</b>	<b>Beiträge zu den Formfaktoren und der WFRK</b>	<b>71</b>
D.1	Definitionen der Integrale . . . . .	71
D.2	Formfaktoren . . . . .	73
D.2.1	Diagramme ohne Deltaresonanz . . . . .	73
D.2.2	Diagramme mit Deltaresonanz . . . . .	87
D.3	Graphische Darstellung der Dirac- und Pauli-Formfaktoren . .	97
D.4	Wellenfunktionsrenormierungskonstante . . . . .	98

# Kapitel 1

## Einleitung

Das aus heutiger Sicht vielleicht wertvollste Werkzeug der theoretischen Kern- und Teilchenphysik ist die Quantenfeldtheorie (QFT). Mit ihrer Hilfe lassen sich sowohl die Erzeugung und Vernichtung als auch die Wechselwirkungen aller bekannten Elementarteilchen erfolgreich beschreiben. Desweiteren wird durch sie die Existenz experimentell bestätigter Antimaterie vorhergesagt: Für jedes Teilchen existiert ein entsprechendes Antiteilchen mit gleicher Masse und entgegengesetzter Ladung. Die mathematische Struktur der QFT folgt aus den Prinzipien der Quantentheorie und der speziellen Relativitätstheorie, wenn man von punktförmigen Teilchen in der Raumzeit ausgeht und zusätzlich fordert, dass sich weit voneinander entfernte Experimente nicht gegenseitig beeinflussen (*cluster decomposition principle*) [1].

Im Rahmen der QFT wird der Hilbertraum eines Quantenfeldes durch teilchenartige Anregungen konstruiert, wodurch der Unterschied zwischen Feld und Teilchen gänzlich verloren geht. Konventionelle Teilchen werden nun als Zustände quantisierter Felder interpretiert.

Besonders erfolgreiche Quantenfeldtheorien zur Beschreibung von Elementarteilchen sind Eichtheorien. Sie nutzen das Prinzip der lokalen Symmetrie, um Wechselwirkungen zwischen Materiefeldern und Eichbosonen zu generieren. Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist eine  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Eichtheorie und stellt die vereinheitlichte Theorie der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung dar. Bis auf die Gravitation können somit alle aus heutiger Sicht fundamentalen Kräfte mit einer Theorie beschrieben werden. Im Standardmodell stellen die in Quarks und Leptonen aufgeteilten Fermionen die Materiefelder dar. Es gibt sechs verschiedene Quarktypen (*flavors*) *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom*, *top*, von denen jeder drei verschiedene Farbladungen (*colors*) *red*, *green*, *blue*, tragen kann. Quarks unterliegen sowohl der starken und schwachen als auch der elektromagnetischen Wechselwirkung. Weiterhin gibt es sechs Leptonen, das

Elektron ( $e$ ), das Myon ( $\mu$ ) und das Tau ( $\tau$ ), die schwach und elektromagnetisch wechselwirken, sowie die zugehörigen Neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$ , die nur der schwachen Wechselwirkung unterliegen. Zusätzlich besitzt jedes Fermion ein Antiteilchen.

Der für diese Arbeit relevante Teil des Standardmodells ist die starke Wechselwirkung. Sie kann erfolgreich durch die Quantenchromodynamik (QCD) [2, 3, 4] beschrieben werden. Dabei handelt es sich um eine  $SU(3)$ -Eichtheorie, in der die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks durch den Austausch masseloser Eichbosonen, den Gluonen, vermittelt wird. Aufgrund der nichtabelschen Struktur der Eichgruppe tragen die acht Gluonen wie die Quarks Farbladungen und können somit untereinander wechselwirken. Obwohl Quarks als elementare Bestandteile der Materie gelten, wurden noch keine freien Quarks beobachtet. In der Natur scheinen ausschließlich farbneutrale Kombinationen aus Quarks und Gluonen aufzutreten. Dieses theoretisch noch nicht bewiesene Phänomen bezeichnet man als *confinement* [5].

Stark wechselwirkende, farbneutrale Teilchen nennt man Hadronen. Man unterscheidet zwischen zwei Arten von Hadronen: den Mesonen, die aus einem Valenzquark-Antivalenzquark-Paar bestehen, und den Baryonen, die aus drei Valenzquarks bestehen. Nach dem heutigen Verständnis sind Hadronen komplexe Objekte, die aus einer Vielzahl von Quarks und Gluonen aufgebaut sind. Es sind jedoch die oben erwähnten Valenzquarks, aus denen sich Quantenzahlen wie Baryonenzahl oder Ladung ableiten lassen.

Lässt man unter Vernachlässigung der drei schweren Quarks ( $c$ ,  $b$ ,  $t$ ) die Massen der drei leichten Quarks ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ) gegen null streben (chiraler Grenzfall), ist die Lagrangedichte der QCD invariant unter der chiralen Gruppe  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ . Wider Erwarten ordnen sich die Hadronen nicht nach irreduziblen Darstellungen der Gruppe  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , sondern nach jenen der Gruppe  $SU(3)$  an. Bemerkenswert sind auch die Massen der acht pseudoskalaren Mesonen ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$ ,  $\eta$ ), da sie viel kleiner als diejenigen der aus den gleichen Valenzquarks aufgebauten Vektormesonen ( $\rho^+$ ,  $\rho^-$ ,  $\rho^0$ ,  $K^{*+}$ ,  $K^{*-}$ ,  $K^{*0}$ ,  $\bar{K}^{*0}$ ,  $\omega$ ) sind. Diese Beobachtungen lassen sich durch die spontane Symmetriebrechung der chiralen Gruppe  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  auf die Gruppe  $SU(3)$  erklären. Dabei werden durch das Goldstone-Theorem acht masselose Goldstone-Bosonen vorhergesagt [6], die in den acht pseudoskalaren Mesonen wiedererkannt werden können. Die endlichen Massen der pseudoskalaren Mesonen resultieren aus den endlichen Quarkmassen, welche eine explizite Brechung der Symmetrie hervorrufen.

Da die QCD eine nichtabelsche Eichtheorie ist, nimmt der Wert ihrer effektiven Kopplungskonstante  $\alpha_s$  bei steigender Energie ab. Diese Eigenschaft wird asymptotische Freiheit [2, 5, 7] genannt und hat zur Folge, dass man die starke Wechselwirkung in zwei Bereiche einteilen kann. Im Bereich

großer Wechselwirkungsenergien verhalten sich die Quarks und Gluonen in einem räumlich beschränkten Gebiet wie freie Teilchen und störungstheoretische Rechnungen sind analog zur QED durchführbar. Bei geringer Wechselwirkungsenergie ist die effektive Kopplungskonstante jedoch so groß, dass konventionelle Störungsrechnungen nicht mehr sinnvoll sind. In diesem Bereich ist es üblich, effektive Feldtheorien (EFT) anzuwenden [8]. Ihr Konzept besteht darin, die allgemeinste, mit den Symmetrien der zugrunde liegenden Theorie verträgliche, Lagrangedichte aufzustellen. Dabei verwendet man nicht notwendigerweise die Freiheitsgrade der zugrunde liegenden Theorie, sondern diejenigen, die für ein gegebenes Problem relevant sind: Im niederenergetischen Bereich der QCD sind dies im Wesentlichen Nukleonen und Pionen, nicht Quarks und Gluonen.

Die in dieser Arbeit verwendete EFT ist die auf der chiralen Symmetrie der QCD basierende chirale Störungstheorie (ChPT) [9, 10, 11]. Betrachtet man Prozesse mit Schwerpunktsenergien unterhalb der Masse der Rho-Mesonen, sind die einzigen produzierbaren Teilchen die Goldstone-Bosonen, deren Wechselwirkung im chiralen Grenzfall bei kleiner werdenden Energien verschwindet. Das ist der Ausgangspunkt der mesonischen chiralen Störungstheorie (MChPT), in der man den obigen Sachverhalt dazu nutzt, die allgemeinste Lagrangedichte für das pseudoskalare Meson-Oktett nach kleinen Impulsen und Quarkmassen zu entwickeln. Die allgemeinste Lagrangedichte besitzt eine unendliche Anzahl von Termen. Jeder Term wird von einer Niederenergiekonstanten (*low-energy coupling constants*, LEC) begleitet, deren Zahlenwert sich aus der zugrunde liegenden Theorie ableiten ließe. Da man nicht in der Lage ist die QCD zu lösen, ist es üblich die Konstanten an experimentelle Daten anzupassen oder mit Hilfe der Gitter-QCD zu bestimmen [12]. Für eine aussagekräftige Theorie ist es nötig, ein konsistentes Ordnungsschema zu haben, mit dessen Hilfe man die Bedeutung einzelner Diagramme abschätzen kann. Mit dem Weinberg'schen Zählschema [9] analysiert man das Verhalten einzelner Diagramme unter Reskalierung der Impulse und Quarkmassen und kann dadurch jedem Diagramm eine chirale Ordnung zuweisen.

Die chirale Störungstheorie ist eine im traditionellen Sinne nicht renormierbare Theorie, d.h. die durch Schleifenintegrale auftretenden Unendlichkeiten können nicht durch eine Redefinition einer endlichen Anzahl in der Lagrangedichte auftretender Parameter eliminiert werden. Da man in effektiven Feldtheorien die allgemeinste Lagrangedichte aufstellt und somit alle mit den Symmetrien verträglichen Terme berücksichtigt, können die Unendlichkeiten Ordnung für Ordnung in den Niederenergiekonstanten absorbiert werden [1].

Erweitert man die MChPT um die Freiheitsgrade des Nukleons, gelangt

man zur baryonischen chiralen Störungstheorie (BChPT) [13]. Hier tritt ein Problem mit dem Zählschema auf: Die Nukleonmasse ist in der Größenordnung der Skala der spontanen Symmetriebrechung  $\Lambda$  ( $\approx 1$  GeV). Das Weinberg'sche Zählschema ist nicht mehr anwendbar, da Schleifenintegrale sowohl zu niedrigeren Ordnungen als auch zu höheren Ordnungen beitragen als durch das Zählschema bestimmt. Eine Möglichkeit zur Wiederherstellung des chiralen Zählschemas ist die Verwendung der chiralen Störungstheorie für schwere Baryonen (*heavy-baryon chiral perturbation theory*, HBChPT) [14, 15], in der der Nukleon-Viererimpuls in einen Teil von der Größenordnung der Nukleonmasse und einen kleinen Rest zerlegt wird. Diese Methode liefert jedoch in einigen Fällen nicht das richtige analytische Verhalten. Die *Infrarotregularisierung* (IR) [16] und die erweiterte Massenschalenrenormierung (*extended on-mass-shell* (EOMS) *scheme*) [17] stellen zwei manifest lorentzinvariante Renormierungsverfahren dar, bei denen dieses Problem nicht auftritt.

Um experimentelle Daten über einen größeren kinematischen Bereich beschreiben zu können, ist es notwendig weitere effektive Freiheitsgrade in die Theorie einzubauen. Ein erster Schritt ist die Hinzunahme von Vektormesonen, mit deren Hilfe schon vor der Entwicklung der QCD im sogenannten Vektormesondominanzmodell (VMD) die Kopplung von Photonen an Hadronen gut vorhergesagt werden konnte. Auch die Einbeziehung der Deltaresonanz, die den ersten angeregten Zustand des Nukleons darstellt, scheint sinnvoll, da ihre Anregungsenergie nur etwa der doppelten Pionmasse entspricht. Mit Hilfe des EOMS-Renormierungsschemas kann man diese Freiheitsgrade explizit in die Theorie einbauen ohne das Zählschema zu verletzen.

Als Otto Stern 1933 das magnetische Moment des Protons maß, fand er eine signifikante Abweichung von dem eines Punktteilchens [18]. Dieses Experiment war der erste Hinweis darauf, dass Nukleonen keine Elementarteilchen sind, sondern eine innere Struktur besitzen. Aus elastischen Elektronenstreuexperimenten kann man die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons extrahieren und somit fundamentale Informationen über dessen Aufbau erlangen. Betrachtet man die Formfaktoren für kleine Impulsüberträge in einem bestimmten Bezugssystem, dem Breit-System, so stellen sie die Fouriertransformierten der Ladungs- und Magnetisierungsverteilung im nichtrelativistischen Grenzfall dar. Aufgrund der großen Menge und Präzision der verfügbaren Messdaten, stellt die Beschreibung der Formfaktoren einen wichtigen Test für jede phänomenologische Theorie der starken Wechselwirkung dar.

Bisherige Berechnungen der elektromagnetischen Formfaktoren in chiraler Störungstheorie ohne explizite Einbeziehung von Resonanzen stimmen nur für sehr kleine Energien mit den experimentellen Daten überein [15, 19, 20, 21, 22]. In den Referenzen [19] und [23] konnten die Ergebnisse für

die Formfaktoren durch eine semi-phänomenologische Berücksichtigung von Vektormesonen verbessert werden. Ein nächster Schritt ist die Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren mit einer effektiven Feldtheorie, die Vektormesonen auf konsistente Weise berücksichtigt, so wie sie in Referenz [24] konstruiert wurde. Desweiteren gilt es zu prüfen, welchen Einfluss die Hinzunahme der Deltaresonanz auf die Ergebnisse hat.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons in manifest lorentzinvarianter chiraler Störungstheorie bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  unter konsistenter Berücksichtigung von Vektormesonen und der Deltaresonanz.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im zweiten Kapitel wird eine kurze Einführung in die QCD sowie die chirale Störungstheorie für Mesonen und Baryonen gegeben. Das dritte Kapitel befasst sich mit der Renormierung von effektiven Feldtheorien. Dabei werden sowohl die zur Renormierung für ChPT mit Baryonen benötigte Infrarotregularisierung als auch das in dieser Arbeit verwendete EOMS-Schema präsentiert. Im vierten Kapitel wird der konsistente Einbau von Vektormesonen und der Deltaresonanz in die ChPT diskutiert. Dabei wird insbesondere darauf eingegangen, welche Konsequenzen sich aus den Konsistenzbedingungen und der Forderung nach störungstheoretischer Renormierbarkeit für die Kopplungskonstanten ergeben. In Kapitel 5 werden die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons unter Berücksichtigung von Vektormesonen und der Deltaresonanz berechnet. Es werden verschiedene Fits der Sachs-Formfaktoren angefertigt und graphisch als Funktion des Impulsübertrages  $Q^2$  dargestellt. Die Ergebnisse der Sachs-Formfaktoren werden schließlich untereinander und mit den experimentellen Daten verglichen. Kapitel 6 beinhaltet eine Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse.

# Kapitel 2

## QCD und chirale Störungstheorie

Die chirale Störungstheorie ist die effektive Feldtheorie der QCD [9, 10, 11]. Sie basiert auf der globalen  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie der zugrunde liegenden QCD-Lagrangedichte im chiralen Grenzfall. Mit ihrer Hilfe lassen sich Prozesse der starken Wechselwirkung auch bei niedrigen Energien störungstheoretisch berechnen. In diesem Kapitel werden sowohl die Lagrangedichte der QCD und ihre Symmetrien vorgestellt als auch eine Einführung in die chirale Störungstheorie für Mesonen und Baryonen gegeben. Der folgende Text orientiert sich an Referenz [25], in dem sich eine ausführliche Einführung in das Themengebiet findet.

### 2.1 QCD-Lagrangedichte

Die QCD beschreibt die starke Wechselwirkung zwischen Quarks durch den Austausch von masselosen Eichbosonen. Es handelt sich hierbei um eine nichtabelsche Eichtheorie mit der Symmetriegruppe  $SU(3)_c$ . Die Quarks stellen die Materiefelder der QCD dar und kommen in sechs verschiedenen Flavours mit jeweils drei verschiedenen Farben vor. Die acht Gluonen sind die Eichbosonen der QCD und vermitteln die Wechselwirkung zwischen den Quarks.

Die Lagrangedichte der QCD lautet wie folgt [26, 27]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$D_\mu q_f = \partial_\mu q_f - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a q_f, \quad (2.2)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.3)$$

flavor	up	down	strange
Masse [MeV]	1, 5 – 3	3 – 7	95 ± 25
flavor	charm	bottom	top
Masse [MeV]	1250 ± 90	4200 ± 70	174200 ± 3300

Tabelle 2.1: Quarkmassen [28]

Die Summation läuft über alle Quarkflavors  $f$ , wobei man für jeden Quarkflavor einen dreikomponentigen Spinor einführt:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Die Massen  $m_f$  der Quarks sind in Tabelle 2.1 angegeben. Die kovariante Ableitung  $D_\mu$ , die die acht Gluonfelder  $A_\mu^a$  enthält, vermittelt die Wechselwirkung zwischen den Quarkfeldern und den Gluonen, wobei  $g$  die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung ist. Die acht Gell-Mann-Matrizen  $\lambda_a$  sind die Generatoren und die  $f_{abc}$  die Strukturkonstanten der  $SU(3)$  (siehe Anhang A.2).

Wie aus Gleichung (2.3) ersichtlich, enthalten die Feldstärketensoren  $G_{\mu\nu}^a$  der QCD das Produkt zweier Gluonfelder. Da der kinetische Term der Lagrangedichte die Struktur  $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$  hat, besteht die Möglichkeit einer Selbstkopplung der Eichfelder. Diese Selbstwechselwirkung der Eichfelder ist ein Charakteristikum von nichtabelschen Eichtheorien und tritt bei abelschen Eichtheorien wie der QED nicht auf.

An den Zahlenwerten der Stromquarkmassen aus Tabelle (2.1) ist erkennbar, dass die Massen der Up- und Down-Quarks um eine Größenordnung kleiner als die des Strange-Quarks und mindestens um zwei Größenordnungen kleiner als die der restlichen Quarks sind. Daher kann man davon ausgehen, dass hauptsächlich Up- und Down-Quarks bei niederenergetischen Prozessen der starken Wechselwirkung von Relevanz sind und demzufolge im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur solche berücksichtigt werden. Während sich beispielsweise die Masse des Wasserstoffatoms aus der Summe der Elektronen- und Protonenmasse, aber einem nur sehr geringem Anteil an Bindungsenergie zusammensetzt, ist die Summe der Massen zweier Up-Quarks und eines Down-Quarks wesentlich kleiner als die Masse eines Protons. Dass offensichtlich die Wechselwirkungen im Proton den Hauptanteil seiner Masse ausma-

chen, rechtfertigt die Betrachtung des chiralen Grenzfalls, d.h.  $m_u, m_d \rightarrow 0$ :

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{f=u,d} i\bar{q}_f \not{D} q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Um die Symmetrie dieser Lagrangedichte hervorzuheben, führt man die Projektionsoperatoren  $P_R$  und  $P_L$  ein, die aus einer freien, masselosen Lösung der Dirac-Gleichung die Zustände mit positiver (rechtshändig) bzw. negativer (linkshändig) Helizität herausprojizieren. Man schreibt mit ihrer Hilfe die Quarkfelder in rechts- und linkshändige Anteile um,

$$q = \left( \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \right) q = (P_R + P_L)q = q_R + q_L, \quad (2.6)$$

und erhält für die Lagrangedichte im chiralen Grenzfall:

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{f=u,d} i(\bar{q}_{R,f} \not{D} q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} \not{D} q_{L,f}) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Diese Lagrangedichte besitzt eine globale  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ -Symmetrie. Dabei stellt die  $U(1)_V$ -Symmetrie die Erhaltung der Baryonenzahl  $B$  dar, welche auf eine Klassifikation der Hadronen in Mesonen ( $B = 0$ ) und Baryonen ( $B = 1$ ) führt.  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  wird als chirale Symmetriegruppe der QCD bezeichnet. Die  $U(1)_A$ -Symmetrie resultiert aus der Invarianz der obigen Lagrangedichte unter den Transformationen  $q \rightarrow \exp(-i\alpha\gamma_5)q$ . Quantenfluktuationen der Quarkfelder im Gluonenhintergrund führen zu einer expliziten Brechung der  $U(1)_A$ -Symmetrie, weshalb  $U(1)_A$  zwar eine Symmetrie der masselosen QCD-Lagrangedichte, nicht aber der Quantentheorie ist ( $U(1)_A$ -Anomalie) [29, 30]. Erwartungsgemäß sollten sich die Hadronen in näherungsweise entarteten Multipletts passend zu den Dimensionalitäten irreduzibler Darstellungen der Gruppe  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  organisieren. Empirisch findet man im Spektrum jedoch nur eine  $SU(2)_V$ -Symmetrie. Dies, zusammen mit der Tatsache, dass die Massen der drei pseudoskalaren Mesonen (Pionen) viel kleiner sind als die typische Massenskala von Hadronen, lässt vermuten, dass die chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie spontan zu einer  $SU(2)_V$ -Symmetrie gebrochen ist. Eine Symmetrie ist dann spontan gebrochen, wenn der Grundzustand eines Systems nicht invariant unter der kompletten Symmetriegruppe  $G$  des Hamiltonoperators ist, sondern nur unter einer Untergruppe  $H$  von  $G$ . Sei  $n_G$  die Anzahl der Generatoren der Gruppe  $G$  und  $n_H$  die der Gruppe  $H$ , so folgt aus dem Goldstone-Theorem [6] die Existenz von  $n_G - n_H$  masselosen Goldstone-Bosonen, deren Eigenschaften durch die  $n_G - n_H$  Generatoren bestimmt werden, die den Grundzustand nicht vernichten.

Die Gruppe  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  besitzt sechs und die Gruppe  $SU(2)$  drei Generatoren. Daraus resultieren für die QCD drei Goldstone-Bosonen, die man mit dem Pionen-Triplett identifiziert. Durch die explizite Symmetriebrechung der von null verschiedenen Up- und Down-Quarkmassen erhalten die Pionen eine endliche Masse, die im chiralen Grenzfall verschwindet. Nach dem Coleman-Theorem [31] wird die Symmetrie des Teilchenspektrums von der Symmetriegruppe des Grundzustandes bestimmt, was die beobachtete  $SU(2)_V$ -Symmetrie erklärt.

## 2.2 Ward-Identitäten und lokale Symmetrien

Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Operatoren sind in quantenfeldtheoretischen Rechnungen von großer Bedeutung. Diese sogenannten Green'schen Funktionen können über den Lehmann-Symanzik-Zimmermann-Formalismus (LSZ) mit den physikalischen Streuamplituden in Verbindung gebracht werden [32]. Im Folgenden wird am Beispiel der QCD illustriert, wie aufgrund von Symmetrieeigenschaften Verknüpfungen zwischen verschiedenen Green'schen Funktionen generiert werden. Diese exakten Beziehungen zwischen Green'schen Funktionen nennt man Ward-Identitäten.

Als Beispiel betrachten wir den Vakuumerwartungswert zwischen einem axialen Vektorstrom  $A_a^\mu$  und einer pseudoskalaren Dichte  $P_b$

$$\begin{aligned} G_{ab}^\mu(x, y) &= \langle 0 | T [A_a^\mu(x) P_b(y)] | 0 \rangle \\ &= \Theta(x_0 - y_0) \langle 0 | A_a^\mu(x) P_b(y) | 0 \rangle + \Theta(y_0 - x_0) \langle 0 | P_b(y) A_a^\mu(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dabei sind der axiale Vektorstrom und die pseudoskalare Dichte folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} A_a^\mu &= \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} q, \\ P_b &= i \bar{q} \gamma_5 \tau_b q. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Außerdem wurde bei der Auswertung des zeitgeordneten Produktes die Heaviside'sche Stufenfunktion  $\Theta$  mit den Eigenschaften

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

eingeführt. Bildet man nun unter Verwendung von

$$\partial_\mu^x \Theta(x_0 - y_0) = \delta(x_0 - y_0) g_{0\mu} = -\partial_\mu^y \Theta(y_0 - x_0)$$

die Divergenz von Gleichung (2.9), erhält man

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^x G_{ab}^\mu(x, y) &= \delta(x_0 - y_0) \langle 0 | A_a^0(x) P_b(y) | 0 \rangle - \delta(y_0 - x_0) \langle 0 | P_b(y) A_a^0(x) | 0 \rangle \\
&\quad + \Theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \partial_\mu^x A_a^\mu(x) P_b(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \Theta(y_0 - x_0) \langle 0 | P_b(y) \partial_\mu^x A_a^\mu(x) | 0 \rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0) \langle 0 | [A_a^0(x), P_b(y)] | 0 \rangle + \langle 0 | T [\partial_\mu^x A_a^\mu(x) P_b(y)] | 0 \rangle.
\end{aligned}$$

Durch die Ableitung von  $\Theta$  wurde ein gleichzeitiger Kommutator erzeugt. Die Divergenz des axialen Vektorstroms  $\partial_\mu^x A_a^\mu(x)$  verschwindet bei einer exakten Symmetrie, während der Wert des gleichzeitigen Kommutators  $[A_a^0(x), P_b(y)]$  im Allgemeinen ungleich null ist und von der zugrunde liegenden Symmetrie abhängt. Im Fall der QCD nimmt der gleichzeitige Kommutator folgende Gestalt an

$$[A_a^0(x), P_b(y)] = -i\delta_{ab}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\bar{q}(x)q(x). \quad (2.10)$$

Aufgrund der endlichen Quarkmassen ist die chirale Symmetrie keine exakte Symmetrie. Dies führt dazu, dass die Divergenz des axialen Vektorstroms der QCD einen nicht verschwindenden Beitrag liefert, so dass man schließlich für die Divergenz der obigen Green'schen Funktion als Resultat

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^x G_{ab}^\mu(x, y) &= -i\delta_{ab}\delta^4(x - y) \langle 0 | \bar{q}(x)q(x) | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | T \left[ i\bar{q}(x) \left\{ \frac{\tau_a}{2}, M \right\} \gamma_5 q(x) P_b(y) \right] | 0 \rangle
\end{aligned} \quad (2.11)$$

erhält. Dabei steht  $M$  für die Quarkmassenmatrix, die im  $SU(2)$ -Sektor durch den Ausdruck

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

gegeben ist.

Die obige Ward-Identität wird chirale Ward-Identität genannt, da ihr die chirale Symmetrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  zugrunde liegt. Die berühmteste solcher Relationen zwischen Green'schen Funktionen basiert auf der  $U(1)$ -Eichinvarianz der QED und heißt Ward-Takahashi-Identität. Sie stellt eine Relation zwischen dem elektromagnetischen Vertex und der Differenz zweier inverser Propagatoren dar [33]. In Abschnitt 5.5 wird näher auf diese Ward-Identität eingegangen und gezeigt, wie sich mit ihrer Hilfe die Ergebnisse für die elektromagnetischen Formfaktoren überprüfen lassen.

Chirale Ward-Identitäten spielen eine wichtige Rolle in der Konstruktion der chiralen Störungstheorie, da die bisher betrachteten globalen Symmetrien nicht ausreichen, um die niederenergetische Struktur der QCD vollständig zu

bestimmen. Der Pfadintegralformalismus liefert eine elegante Methode, alle Green'schen Funktionen einer Theorie aus dem zugehörigen erzeugenden Funktional zu gewinnen. Dazu führt man externe Felder ein, die im Falle der QCD an Vektor- und Axialvektorströme sowie die skalaren und pseudoskalaren Quarkdichten koppeln [10]. Dadurch erhält man die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \mathcal{L}_{ext} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \bar{q}\gamma_5(v^\mu + \frac{1}{3}v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q, \quad (2.13)$$

in der die äußeren Felder durch farbneutrale, hermitesche  $(2, 2)$ -Matrizen der folgenden Gestalt dargestellt werden

$$v^\mu = \sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i}{2} v_i^\mu, \quad v_{(s)}^\mu = \frac{\tau_0}{2} v_0^\mu, \quad a^\mu = \sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i}{2} a_i^\mu, \quad s = \sum_{i=0}^3 \tau_i s_i, \quad p = \sum_{i=0}^3 \tau_i p_i. \quad (2.14)$$

Die  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) stehen dabei für die Pauli-Matrizen und  $\tau_0$  stellt die zweidimensionale Einheitsmatrix dar. Die ursprüngliche QCD-Lagrangedichte erhält man, indem man  $v^\mu = v_{(s)}^\mu = a^\mu = p = 0$  und  $s = \text{diag}(m_u, m_d)$  setzt. Der letzte Term ist für die explizite Symmetriebrechung verantwortlich und verleiht den Pionen ihre Masse.

Für die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons wird insbesondere die Kopplung des elektromagnetischen Feldes  $A^\mu$  an die Lagrangedichte benötigt. Im Zwei-Flavor-Sektor enthält diese sowohl isoskalare als auch isovektorielle Anteile:

$$\mathcal{L}_{ext} = \bar{q}\gamma^\mu \left( \frac{1}{3}v_\mu^{(s)} + v_\mu \right) q = -eA_\mu \bar{q}\gamma^\mu \left( \frac{1}{6} + \frac{\tau_3}{2} \right) q = -eA_\mu J^\mu. \quad (2.15)$$

Daraus folgt für die vektoriellen Felder:

$$v_\mu^{(s)} = -\frac{e}{2}A_\mu, \quad v_\mu = -\frac{e}{2}\tau_3 A_\mu. \quad (2.16)$$

Bisher ist die Lagrangedichte unter globalen  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen invariant. Eine Invarianz unter lokalen  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen wird durch folgende Transformationseigenschaften der externen Felder gewährleistet:

$$(v_\mu + a_\mu) \rightarrow V_R(v_\mu + a_\mu)V_R^\dagger + iV_R\partial_\mu V_R^\dagger, \quad (2.17)$$

$$(v_\mu - a_\mu) \rightarrow V_L(v_\mu - a_\mu)V_L^\dagger + iV_L\partial_\mu V_L^\dagger, \quad (2.18)$$

$$(s + ip) \rightarrow V_R(s + ip)V_L^\dagger, \quad (2.19)$$

$$(s - ip) \rightarrow V_L(s - ip)V_R^\dagger, \quad (2.20)$$

wobei  $(V_L, V_R) \in SU(2)_L \times SU(2)_R$ . Diese lokale Invarianz wird gefordert, da die Möglichkeit besteht alle Ward-Identitäten der QCD aus den Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals

$$\exp(iZ[v, a, s, p]) = \langle 0|T \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{ext}(x) \right] |0\rangle \quad (2.21)$$

nach den externen Feldern zu gewinnen [10]. Die Ward-Identitäten sind also äquivalent zur Invarianz des erzeugenden Funktionals unter lokalen Transformationen. Damit stellt das erzeugende Funktional aus Gleichung (2.21) die entscheidende Verbindung zwischen der zugrunde liegenden Theorie und der effektiven Theorie dar.

## 2.3 Chirale Störungstheorie

Nachdem in den vorigen zwei Abschnitten die Symmetrien der QCD herausgearbeitet wurden, sind wir nun in der Lage die entsprechende effektive Feldtheorie für niederenergetische, hadronische Prozesse, nämlich die chirale Störungstheorie, zu konstruieren. Der Grundstein der ChPT wurde in Weinbergs Arbeit mit dem Titel „Phenomenological Lagrangians“ [9] gelegt. Dort findet sich eine auf globalen Symmetrieüberlegungen basierende Herleitung der Struktur einer effektiven Feldtheorie. Gasser und Leutwyler zeigten, dass die Eigenschaften von effektiven Lagrangedichten ausschließlich aus den Ward-Identitäten der zugrunde liegenden Theorie abgeleitet werden können [10]. Die ChPT ermöglicht eine systematische Untersuchung der QCD bei niedrigen Energien, wobei die durch sie generierten Übergangsmatrixelemente automatisch die Niederenergie-Theoreme der Stromalgebra und PCAC-Hypothese erfüllen. Die effektiven Freiheitsgrade der ChPT sind nicht die fundamentalen Freiheitsgrade der QCD, sondern die experimentell messbaren hadronischen Zustände. Auch findet keine störungstheoretische Entwicklung in der starken Kopplungskonstante  $g$  statt, sondern eine Taylor-Reihenentwicklung in  $q/\Lambda$ , wobei  $q$  für kleine Impulse oder Pionmassen und  $\Lambda$  für die Skala der spontanen Symmetriebrechung ( $\Lambda \approx 1\text{GeV}$ ) steht.

### 2.3.1 Zählschema

Da die chirale Störungstheorie die effektive Feldtheorie der QCD ist, wird die allgemeinste, mit den Symmetrien der zugrunde liegenden Theorie verträgliche, Lagrangedichte benötigt. Im Fall der QCD sind das Parität, Ladungskonjugation, Zeitumkehrinvarianz, Hermitizität, Lorentzinvarianz und vor allem die chirale Symmetrie. Die allgemeinste Lagrangedichte besitzt eine

unendliche Anzahl von Termen, die man nach Ableitungen und Quarkmassen entwickelt,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \dots \quad (2.22)$$

Der Index zeigt die Ordnung der Entwicklung an. Um die Wichtigkeit einzelner Diagramme zu bestimmen, verwendet man im mesonischen Sektor das Weinberg'sche Zählschema [9], in dem jedem Diagramm, aufgrund des Verhaltens seiner invarianten Amplitude  $M$  unter Reskalierung der äußeren Impulse,  $p_i \rightarrow tp_i$ , und quadratischer Reskalierung der leichten Quarkmassen,  $m_q \rightarrow t^2 m_q$ , eine chirale Ordnung  $D$  zugewiesen wird:

$$M(tp_i, t^2 m_q) = t^D M(p_i, m_q), \quad D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1) N_{2n} + 2N_L. \quad (2.23)$$

Dabei ist  $N_L$  die Anzahl der Schleifen im Diagramm und  $N_{2n}$  die Anzahl der Vertizes aus  $\mathcal{L}_{2n}$ .

### 2.3.2 Mesonische Lagrangedichte

Die Lagrangedichte wird aus einer Reihe von Bausteinen mit wohldefinierter chiraler Ordnung konstruiert. Die pionischen Freiheitsgrade werden durch eine unitäre  $(2, 2)$ -Matrix  $U(x)$  zusammen gefasst,

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\Phi(x)}{F}\right), \quad \Phi(x) = \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Dabei steht  $F$  für die Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall mit  $F_\pi = F(1 + \mathcal{O}(\hat{m})) = 92,4$  MeV. Die Matrix  $U(x)$  transformiert bezüglich der chiralen Gruppe wie

$$U(x) \rightarrow V_R U(x) V_L^\dagger \quad (2.25)$$

und besitzt die chirale Ordnung

$$U = \mathcal{O}(q^0). \quad (2.26)$$

Zur Konstruktion der Lagrangedichte werden unter Verwendung der Größen  $r^\mu = v^\mu + a^\mu$  und  $l^\mu = v^\mu - a^\mu$  noch folgende Bausteine benötigt:

$$D_\mu U = \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu, \quad (2.27)$$

$$F_{\mu\nu}^R = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \quad (2.28)$$

$$F_{\mu\nu}^L = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu], \quad (2.29)$$

$$\chi = 2B(s + ip). \quad (2.30)$$

$B$  ist über die Beziehung  $2F^2B = -\langle \bar{q}q \rangle$  mit dem skalaren Quarkkondensat verknüpft. Die Bausteine transformieren unter der chiralen Gruppe wie

$$D^\mu U \rightarrow V_R D^\mu U V_L^\dagger, \quad F_R^{\mu\nu} \rightarrow V_R F_R^{\mu\nu} V_R^\dagger, \quad F_L^{\mu\nu} \rightarrow V_L F_L^{\mu\nu} V_L^\dagger, \quad \chi \rightarrow V_R \chi V_L^\dagger, \quad (2.31)$$

und besitzen die folgenden chiralen Ordnungen:

$$D_\mu = \mathcal{O}(q), \quad F_{\mu\nu}^{R/L} = \mathcal{O}(q^2), \quad \chi = \mathcal{O}(q^2). \quad (2.32)$$

Da  $\chi$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$  ist und aufgrund der Lorentzinvarianz der Lagrangedichte alle Ableitungen kontrahiert werden müssen, treten im mesonischen Sektor nur Lagrangedichten mit gerader Ordnung auf. Die allgemeinste Lagrangedichte der niedrigsten Ordnung lautet [10]

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \text{Tr} (D_\mu U (D^\mu U)^\dagger) + \frac{F^2}{4} \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger). \quad (2.33)$$

Sie enthält zwei Niederenergiekonstanten,  $F$  und  $B$ , und ist mit allen Symmetrien der QCD verträglich.

Bei der Konstruktion der Lagrangedichten höherer chiraler Ordnungen muss man eine Vielzahl weiterer Terme berücksichtigen, von denen jeder von einer LEC begleitet wird. Die Niederenergiekonstanten enthalten Informationen der zugrunde liegenden Theorie und sollten deshalb prinzipiell aus der QCD ableitbar sein. Da man bisher nicht in der Lage ist die QCD zu lösen, werden sie an experimentelle Daten angepasst oder durch QCD-inspirierte Modelle bestimmt. Auch die Gitter-QCD spielt mittlerweile eine wichtige Rolle in der Vorhersage der Konstanten [12]. Die unendliche Anzahl unbekannter Konstanten ist zwar der Preis, den man für die Unkenntnis der Lösung der QCD bezahlen muss, sie ist aber andererseits nötig, um die Renormierbarkeit der chiralen Störungstheorie zu gewährleisten.

### 2.3.3 Baryonische Lagrangedichte

Bisher wurde nur die chirale Störungstheorie für Mesonen, d.h. die Wechselwirkung der Goldstone-Bosonen untereinander und mit externen Feldern, betrachtet. Die Erweiterung auf baryonische Freiheitsgrade verläuft analog zum Mesonsektor, wobei wir uns wieder auf den SU(2)-Sektor, also Protonen und Neutronen, beschränken. Außerdem betrachten wir nur solche Situationen, in denen sich ein einzelnes Nukleon im Anfangs- und Endzustand befindet. Da man es nun mit Fermionen zu tun hat, stehen die Dirac-Matrizen  $\{1_{4 \times 4}, \gamma^\mu, \gamma_5, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\}$  als zusätzliche Bausteine zur Verfügung. Demzufolge können durch Kontraktion von Gamma-Matrizen mit einer ungeraden Anzahl

von Ableitungen Lagrangedichten mit ungerader chiraler Ordnung konstruiert werden. Die Nukleonen werden in einem Isospinor zusammengefasst

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Die Pionfelder werden durch die Größe  $u$ , mit

$$u = \sqrt{U} = \exp\left(i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{2F}\right), \quad (2.35)$$

dargestellt.

Man führt außerdem die folgenden neuen Bausteine ein:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &= (\partial_\mu + \Gamma_\mu - iv_\mu^{(s)}) \Psi \\ &= \left\{ \partial_\mu + \frac{1}{2} [u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u + u^\dagger(\partial_\mu - il_\mu)u] - iv_\mu^{(s)} \right\} \Psi, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$u_\mu = i [u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u - u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger], \quad (2.37)$$

$$\chi_\pm = u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u, \quad (2.38)$$

$$f_{\mu\nu}^\pm = u F_{\mu\nu}^L u^\dagger \pm u^\dagger F_{\mu\nu}^R u, \quad (2.39)$$

$$v_{\mu\nu}^{(s)} = \partial_\mu v_\nu^{(s)} - \partial_\nu f_\mu^{(s)}. \quad (2.40)$$

Diesem wird analog zum vorigen Abschnitt jeweils eine chirale Ordnung zugewiesen:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &= \mathcal{O}(q^0), & D_\mu U &= \mathcal{O}(q), & u_\mu &= \mathcal{O}(q), \\ \chi_\pm &= \mathcal{O}(q^2), & f_{\mu\nu}^\pm &= \mathcal{O}(q^2), & v_{\mu\nu}^{(s)} &= \mathcal{O}(q^2), \end{aligned} \quad (2.41)$$

wobei die Pion- und Nukleonfelder als Ordnung  $\mathcal{O}(q^0)$  zählen.

Zur Konstruktion der Lagrangedichte werden unter der chiralen Symmetrie invariante Terme benötigt. Die Bausteine sind so gewählt, dass sich aus ihnen einfach Invarianten unter  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  bilden lassen. Sie besitzen das folgende Transformationsverhalten:

$$\Psi \rightarrow K(V_L, V_R, U)\Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}K^{-1}(V_L, V_R, U), \quad (2.42)$$

$$X \rightarrow K(V_L, V_R, U)XK^{-1}(V_L, V_R, U), \quad X = u_\mu, \chi_\pm, f_{\mu\nu}^\pm, v_{\mu\nu}^{(s)}. \quad (2.43)$$

Dabei ist  $K(V_L, V_R, U)$  eine  $SU(2)$ -wertige Matrixfunktion, die durch

$$K(V_L, V_R, U) = u'^{-1}V_R u = \sqrt{V_R U V_L^\dagger}^{-1} V_R \sqrt{U} \quad (2.44)$$

definiert ist. Die kovarianten Ableitungen  $D_\mu \Psi$  und  $[D_\mu, X]$  transformieren konstruktionsgemäß wie die Felder, auf die sie wirken:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &\rightarrow K(V_L, V_R, U) D_\mu \Psi, \\ [D_\mu, X] &\rightarrow K(V_L, V_R, U) [D_\mu, X] K^{-1}(V_L, V_R, U). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die Pion-Nukleon-Lagrangedichte in niedrigster Ordnung ist gegeben durch [13],

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi} \left( i \not{D} - m + \frac{g_A}{2} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \right) \Psi, \quad (2.46)$$

wobei  $m$  die Nukleonmasse und  $g_A$  die axiale Kopplungskonstante im chiralen Grenzfall sind. Im Gegensatz zur Pionmasse verschwindet die Nukleonmasse im chiralen Grenzfall nicht. Daher generiert die nullte Komponente  $\partial_0$  der auf das Nukleonfeld wirkenden partiellen Ableitung keine kleine Größe. Im nächsten Kapitel wird diskutiert, wie man das Weinberg'sche Zählschema modifizieren kann, um dieses Problem zu lösen.

Schließlich werden die zu den Formfaktoren beitragenden Terme der Lagrangedichten höherer Ordnung angegeben. Für die Pion-Nukleon-Lagrangedichte der zweiten Ordnung sind das [13]

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} = c_1 \text{Tr}(\chi_+) \bar{\Psi} \Psi + \bar{\Psi} \left[ \frac{c_6}{2} f_{\mu\nu}^+ + \frac{c_7}{2} f_{\mu\nu}^{(s)} \right] \sigma^{\mu\nu} \Psi + \dots \quad (2.47)$$

Von den 23 Termen der Lagrangedichte der dritten Ordnung werden nur die folgenden zwei Terme benötigt,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} &= \frac{i}{2m} d_6 \bar{\Psi} [D^\mu, f_{\mu\nu}^+] D^\nu \Psi + h.c. \\ &\quad + \frac{2i}{m} d_7 \bar{\Psi} (\partial^\mu f_{\mu\nu}^{(s)}) D^\nu \Psi + h.c. + \dots, \end{aligned} \quad (2.48)$$

wobei h.c. für hermitesch konjugiert steht. Die vollständige Lagrangedichte der dritten Ordnung findet sich in Referenz [34].

# Kapitel 3

## Renormierung

Berechnet man im Rahmen einer QFT Schleifendiagramme, liefern die Schleifenintegrale ultraviolett divergente Beiträge. Um physikalisch sinnvolle Vorhersagen treffen zu können, ist es notwendig die Ergebnisse zu renormieren. Die chirale Störungstheorie ist eine im traditionellen Sinne nicht renormierbare Theorie, d.h. es ist nicht möglich durch eine Redefinition einer endlichen Anzahl von Parametern alle auftretenden Divergenzen zu absorbieren. Da es sich jedoch um eine effektive Feldtheorie handelt, werden alle Terme berücksichtigt, die mit den Symmetrien der zugrunde liegenden Theorie vereinbar sind. Man kann somit die Divergenzen durch Renormierung der unendlichen Anzahl an Parametern absorbieren und erhält damit eine in dieser Hinsicht renormierbare Theorie [1].

Im mesonischen Sektor der chiralen Störungstheorie werden die divergenten Beiträge der Diagramme erst mit Hilfe der dimensional Regularisierung isoliert und anschließend durch die Niederenergiekonstanten, die man in einen endlichen und einen unendlichen Anteil aufspaltet, absorbiert. Dazu wendet man das sogenannte *modified minimal subtraction scheme of ChPT* ( $\overline{MS}$ ) [13] an, wobei zu

$$R = \frac{2}{n-4} - [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \quad (3.1)$$

proportionale Schleifenbeiträge absorbiert werden und man endliche physikalische Größen erhält. Dabei steht  $n$  für die Raumzeitdimension. Wendet man nun dasselbe Schema auf Schleifendiagramme mit Nukleonlinien an, tritt eine Verletzung des chiralen Zählschemas auf, da die renormierten Schleifenbeiträge in niedrigeren Ordnungen beitragen als vom Zählschema vorhergesagt. Ein Grund für diese Diskrepanz ist die im chiralen Grenzfall nicht verschwindende Nukleonmasse. Daher ist es nötig, das Renormierungsverfahren so zu modifizieren, dass man ein konsistentes Zählschema erhält. Zwei lorentzinvariante Methoden, die dieser Anforderung genügen, sind die Infrarotregularisierung

(IR) [16] und die erweiterte Massenschalenrenormierung (EOMS) [17]. Für beide Methoden gilt folgendes Zählchema: Die Schleifenintegration in  $n$  Dimensionen zählt man als  $\mathcal{O}(q^n)$ , wobei  $q$  für die Pionmasse, kleine äußere Pion- oder Nukleonimpulse steht, Pion-Propagatoren zählt man als  $\mathcal{O}(q^{-2})$ , Nukleon-Propagatoren als  $\mathcal{O}(q^{-1})$  und Vertizes aus  $\mathcal{L}_{2k}$  bzw.  $\mathcal{L}_{\pi N}^{(k)}$  als  $\mathcal{O}(q^{2k})$  bzw.  $\mathcal{O}(q^k)$ .

### 3.1 Infrarotregularisierung

Die Infrarotregularisierung ist ein Renormierungsschema, das sich auf Einschleifendiagramme mit einer inneren Fermionlinie und beliebig vielen Goldstone-Boson-Linien anwenden lässt. Man teilt die auftretenden Schleifenintegrale  $H$  eindeutig in einen infrarot singulären Anteil  $I$  und einen infrarot regulären Anteil  $R$  auf. Dabei enthält  $I$  die Beiträge, die nicht analytisch in den Pionmassen und äußeren Impulsen sind, und  $R$  solche die darin analytisch sind. Das Zählchema wird zwar von  $I$  erfüllt, von  $R$  jedoch verletzt. Da der infrarot reguläre Anteil  $R$  analytisch ist und sich deshalb durch eine Taylorreihe darstellen lässt, kann er durch eine unendliche Anzahl von Gegen-terminen in der Lagrangedichte absorbiert werden. Um zu verdeutlichen, wie man  $I$  und  $R$  bestimmt, betrachtet man das folgende Einschleifenintegral mit einer Fermionlinie und einer beliebigen Anzahl von Pion- und Nukleon-Propagatoren:

$$H_{ml}(q_1, \dots, p_1, \dots) = i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{a_1 \dots a_m b_1 \dots b_l} \quad (3.2)$$

$$a_i = (k + q_i)^2 - M^2 + i0^+, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$b_j = (k + p_j)^2 - m^2 + i0^+, \quad j = 1, \dots, l.$$

Nachdem man Tensorintegrale in obige Form gebracht hat, fasst man alle Meson-Propagatoren mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung

$$\frac{1}{a_1 \dots a_m} = \left( \frac{\partial}{\partial M^2} \right)^{(m-1)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_{m-1} \frac{X}{A} \quad (3.3)$$

zusammen, wobei der Zähler  $X$  durch

$$X = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 2 \\ x_2(x_3)^2 \dots (x_{m-1})^{m-2} & \text{für } m > 2 \end{cases}$$

gegeben ist und für den Nenner  $A$  die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\begin{aligned} A &= A_m & (3.4) \\ A_{i+1} &= x_i A_i + (1 - x_i) a_{i+1} \quad (i = 1, \dots, m-1) \\ A_1 &= a_1. \end{aligned}$$

Dabei ist  $A$  für beliebiges  $m \geq 2$  gegeben durch

$$A = (k + \bar{q})^2 - \bar{A} + i0^+. \quad (3.5)$$

Hier ist  $\bar{A}$  eine konstante Größe der Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$  und  $\bar{q}$  eine Linearkombination der äußeren Impulse und von der Ordnung  $\mathcal{O}(q)$ .

Analog den Meson-Propagatoren können nun die Nukleon-Propagatoren kombiniert werden,

$$\frac{1}{b_1 \dots b_l} = \left( \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{(l-1)} \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_{l-1} \frac{Y}{B}, \quad (3.6)$$

wobei der Zähler  $Y$  durch

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{für } l = 2 \\ y_2(y_3)^2 \dots (y_{l-1})^{l-2} & \text{für } l > 2 \end{cases}$$

gegeben ist und für den Nenner  $B$  die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\begin{aligned} B &= B_l & (3.7) \\ B_{i+1} &= y_i B_i + (1 - y_i) b_{i+1} \quad (i = 1, \dots, l-1) \\ B_1 &= b_1. \end{aligned}$$

Dabei ist  $B$  für beliebiges  $l \geq 2$  gegeben durch

$$B = (k + \bar{P})^2 - \bar{B} + i0^+. \quad (3.8)$$

$\bar{B} = m^2 + \mathcal{O}(q)$  ist eine Konstante und  $\bar{P}^2 = (m^2 + \mathcal{O}(q))^2$  ist eine Linearkombination der äußeren Impulse.

Mit Hilfe der Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dz}{[(1-z)A + zB]^2} \quad (3.9)$$

fasst man die obigen Nenner zusammen und erhält für Gl. (3.2):

$$\begin{aligned} H_{ml} &= i \left( \frac{\partial}{\partial M^2} \right)^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{(l-1)} \int_0^1 dz \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_{m-1} & (3.10) \\ &\times \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_{l-1} XY \int \frac{d^n k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(1-z)A + zB]^2}. \end{aligned}$$

Setzt man  $A$  aus (3.5) und  $B$  aus (3.8) ein, wertet die Ableitungen aus und verschiebt die Integrationsvariablen  $k \rightarrow k - \bar{P}z - \bar{q}(1-z)$ , dann kann die Integration über  $k$  ausgeführt werden. Als Ergebnis erhält man:

$$H_{ml} = \frac{(-1)^{1-m-l}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(m+l-n/2) \int_0^1 dz z^{l-1} (1-z)^{m-1} \quad (3.11)$$

$$\times \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_{m-1} \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_{l-1} XY [f(z)]^{(n/2)-m-l},$$

mit

$$f(z) = \bar{P}^2 z^2 - (\bar{P}^2 - \bar{B})z + \bar{A}(1-z) - (\bar{q}^2 - 2\bar{P} \cdot \bar{q})z(1-z) - i0^+. \quad (3.12)$$

Man spaltet nun das Integral folgendermaßen in einen infrarot singulären und einen infrarot regulären Anteil auf:

$$\int_0^1 dz \dots = \underbrace{\int_0^\infty dz \dots}_I - \underbrace{\int_1^\infty dz \dots}_R. \quad (3.13)$$

Der infrarot reguläre Anteil (R) wird abgezogen und der infrarot singuläre mit Hilfe des  $\overline{MS}$ -Schemas renormiert.

## 3.2 EOMS-Renormierung

Ein weiteres lorentzinvariantes Renormierungsschema, das in der chiralen Störungstheorie Verwendung findet, ist die EOMS-Renormierung [17]. Hier werden im Gegensatz zur Infrarotregularisierung nicht alle analytischen Terme subtrahiert, sondern nur solche, die das Zählschema explizit verletzen. Zur Illustration betrachten wir das Integral aus Gleichung (3.2) im chiralen Grenzfall und setzen  $m = l = 1$

$$H_{11}(0, p_1) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{[k^2 + i0^+][(k + p_1)^2 - m^2 + i0^+]}. \quad (3.14)$$

Dabei ist

$$\Delta = \frac{p_1^2 - m^2}{m^2} \quad (3.15)$$

von der Ordnung  $\mathcal{O}(q)$ . Das Resultat des Integrals aus Gleichung (3.14) ist von der Gestalt [17]

$$H \sim F(n, \Delta) + \Delta^{n-3} G(n, \Delta), \quad (3.16)$$

wobei  $F$  und  $G$  hypergeometrische Funktionen darstellen (siehe Anhang A.4), die für jedes  $n$  analytisch in  $\Delta$  sind. Der  $G$  enthaltende Anteil ist für nicht-ganzzahlige Werte von  $n$  proportional zu einer nicht-ganzzahligen Potenz von  $\Delta$  und erfüllt das Zählschema. Um den zu  $F$  proportionalen Anteil zu erhalten, kann man den Integranden nach kleinen Parametern entwickeln, die Integration und Summation vertauschen und schließlich die Integration für jeden Summanden einzeln durchführen [35]. Demnach ist folgende Vorgehensweise möglich: Zunächst entwickelt man den Integranden nach kleinen Größen, dann subtrahiert man diejenigen Terme, die für die Verletzung des Zählschemas verantwortlich sind. Der Abzugsterm für dieses Beispiel lautet

$$H_{11}^{\text{abzug}} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{[k^2 + i0^+][k^2 + 2p_1 \cdot k + i0^+]} \Big|_{p_1^2 = m^2}. \quad (3.17)$$

Damit ergibt sich für das renormierte Integral

$$H_{11}^R = H_{11} - H_{11}^{\text{abzug}}. \quad (3.18)$$

$H_{11}^R$  ist wie vom Zählschema vorhergesagt von der Ordnung  $\mathcal{O}(q^{n-3})$ .

Die oben diskutierte Infrarotregularisierung lässt sich in Analogie zur EOMS-Renomierung umformulieren. Hierzu entwickelt man den Integranden eines gegebenen Diagramms in kleinen Parametern und vertauscht Summation und Integration. Dadurch wird genau der infrarot reguläre Anteil, der das Zählschema verletzt, reproduziert [36]. Subtrahiert man diesen, erhält man wieder das infrarot-regulierte Diagramm. Diese Methode wird als reformulierte Infrarotregularisierung bezeichnet.

Der große Vorteil der EOMS-Renomierung und der reformulierten Infrarotregularisierung besteht darin, dass sie sich im Gegensatz zur Infrarotregularisierung auf Mehrschleifendiagramme und Diagramme mit mehreren Fermionlinien oder Resonanzen anwenden lassen [37, 38].

# Kapitel 4

## Einbau von Resonanzen in die ChPT

Es wurde gezeigt, dass mit chiraler Störungstheorie die elektromagnetischen Formfaktoren nur für sehr kleine Impulsüberträge beschrieben werden können, wenn man als dynamische Freiheitsgrade ausschließlich Pionen und Nucleonen verwendet [15, 19, 20, 21, 22]. Die Aufnahme zusätzlicher dynamischer Freiheitsgrade in die Theorie bietet eine Möglichkeit zur besseren Beschreibung der experimentellen Daten. Bei den Rechnungen unter Verwendung chiraler Störungstheorie sind die Beiträge von Resonanzen wie Vektormesonen oder Deltaresonanz bereits in den Niederenergiekonstanten enthalten. Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, kann man den Propagator einer Resonanz für kleine Impulsüberträge unter Vernachlässigung der Lorentzstruktur entwickeln:

$$\frac{1}{q^2 - M_R^2} = -\frac{1}{M_R^2} \left[ 1 + \left( \frac{q^2}{M_R^2} \right) + \left( \frac{q^2}{M_R^2} \right)^2 + \dots \right], \quad (4.1)$$

wobei  $M_R$  für die Masse einer beliebigen Resonanz steht. Diese Beiträge werden bis zur gegebenen Ordnung in den Niederenergiekonstanten absorbiert. Nimmt man Resonanzen als explizite dynamische Freiheitsgrade in die Lagrangedichte auf, werden automatisch alle Beiträge aus Gleichung (4.1) berücksichtigt. Außerdem stellt die Masse des am tiefsten liegenden, nicht als expliziter Freiheitsgrad betrachteten Teilchens eine obere Grenze für die Energieregion dar, in der eine effektive Feldtheorie anwendbar ist. Man hofft also, den Konvergenzradius der ChPT durch Berücksichtigung zusätzlicher Freiheitsgrade zu vergrößern. Im Folgenden wird die konsistente Erweiterung der chiralen Störungstheorie um Vektormesonen und die Deltaresonanz diskutiert.

## 4.1 Einbau von Vektormesonen

Vektormesonen spielen eine wichtige Rolle in der Beschreibung der Nukleon-Formfaktoren. Mit Hilfe des Vektormesondominanzmodells (VMD) [39] gelang es bereits vor der Entwicklung der QCD die Kopplung eines Photons an Hadronen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu beschreiben. Unser Ziel ist es, Vektormesonen auf konsistente Weise in eine manifest lorentzinvariante effektive Feldtheorie einzubeziehen. Da die zur Konstruktion manifest lorentzinvarianter Theorien erforderlichen Lorentzvektorfelder vierkomponentig sind, Vektormesonen als Spin-1-Teilchen jedoch nur drei physikalische Freiheitsgrade besitzen, benötigt man Zwangsbedingungen, die die Komponenten der Lorentzvektorfelder miteinander verknüpfen. Im nächsten Abschnitt werden die aus den Zwangsbedingungen und der Forderung nach störungstheoretischer Renormierbarkeit resultierenden Konsequenzen für die Parameter der Lagrangedichte und die Wahl der Vektormesonfelder diskutiert.

### 4.1.1 Lagrangedichte und Zwangsbedingungen

Als erstes betrachten wir das Rho-Meson-Triplett, das aus zwei geladenen Rho-Mesonen  $V_\mu^\pm = (V_\mu^1 \mp iV_\mu^2)/\sqrt{2}$  und einem neutralen Rho-Meson  $V_\mu^0 = V_\mu^3$  besteht. Es gibt verschiedene Formulierungen für effektive Feldtheorien mit Vektormesonen, deren Äquivalenz in Referenz [40] gezeigt wurde. Wir verwenden zunächst die Vektorfelddarstellung aus Referenz [41], in der die allgemeinste Lagrangedichte für Vektormesonen durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V = & - \frac{1}{2} \text{Tr}(V_{\mu\nu} V^{\mu\nu}) + [M_\rho^2 + \frac{c_x}{4} \text{Tr}(\chi_+)] \text{Tr}(V_\mu V^\mu) \\ & + 4ig_0 \text{Tr}(V_\mu V_\nu \nabla^\mu V^\nu) + 2g_1 \text{Tr}(V_\mu V_\nu) \text{Tr}(V^\mu V^\nu) \\ & + 2g_2 \text{Tr}(V_\mu V^\mu) \text{Tr}(V_\nu V^\nu) \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} f_V \text{Tr}(V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu}) + f_\chi \text{Tr}\{V_\mu [u^\mu, \chi_-]\} + \dots, \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit  $\Gamma_\mu, u_\mu, \chi_\pm$  und  $f_{\mu\nu}^\pm$  aus Gleichung (2.36)-(2.39) und

$$V_\mu = V_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, \quad (4.3)$$

$$V_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu, \quad (4.4)$$

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu + [\Gamma_\mu, V_\nu]. \quad (4.5)$$

$M_\rho^2$  steht für das Quadrat der Vektormesonenmasse in niedrigster chiraler Ordnung. Unter der chiralen Gruppe transformieren die Rho-Mesonen in der

Vektorfelddarstellung homogen, d.h.

$$V_\mu \rightarrow KV_\mu K^\dagger, \quad (4.6)$$

wobei  $K$  für den in Gleichung (2.44) definierten Kompensator steht.

Wir fordern von unserer Theorie, dass sie eine systematische Entwicklung in kleine Energien, Massen und Kopplungskonstanten bietet. Diese Forderung kann erfüllt werden, wenn die Kopplungskonstanten umso stärker unterdrückt sind, je höhere Dimensionen inverser Masseneinheiten sie besitzen. Das bedeutet, dass bis zu einer bestimmten Ordnung nur Wechselwirkungsterme mit einer gewissen Anzahl an Feldern und Ableitungen beitragen. Im Folgenden wird illustriert, wie die Konsistenzbedingungen einer effektiven Feldtheorie selbstwechselwirkender massiver Vektorfelder mit Zwangsbedingungen (hier Rho-Mesonen) zu einer Einschränkung der Kopplungskonstanten führt. Anschließend werden die daraus gewonnenen Ergebnisse genutzt, um die Lagrangedichte aus (4.2) zu vereinfachen.

Die allgemeinste, manifest lorentzinvariante und paritätserhaltende Lagrangedichte selbstwechselwirkender Vektorfelder, die nur dimensionslose Wechselwirkungsterme enthält, lautet [24]

$$\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4. \quad (4.7)$$

Dabei ist die freie Lagrangedichte durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}^a V^{a,\mu\nu} + \frac{M_\rho^2}{2}V_\mu^a V^{a,\mu}. \quad (4.8)$$

Die Wechselwirkungsterme mit dimensionslosen Kopplungskonstanten besitzen entweder drei oder vier Rho-Mesonfelder und lauten:

$$\mathcal{L}_3 = -g^{abc}V_\mu^a V_\nu^b \partial^\mu V^{c,\nu}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_4 = -h^{abcd}V_\mu^a V_\nu^b V^{c,\mu} V^{d,\nu}. \quad (4.10)$$

Hierbei sind  $g^{abc}$  ( $a, b, c = 1, 2, 3$ ) und  $h^{abcd}$  ( $a, b, c, d = 1, 2, 3$ ) Kopplungskonstanten. Die Anzahl der Kopplungen lässt sich für  $g^{abc}$  auf sieben und für  $h^{abcd}$  auf fünf verringern, wenn man sowohl Ladungserhaltung als auch Hermitizität berücksichtigt und fordert, dass die Lagrangedichte (4.7) invariant unter globaler  $U(1)$ -Transformation ist. In Referenz [24] wurde die kanonische Quantisierung der Lagrangedichte (4.7) durchgeführt. Dort wurde gezeigt, dass aufgrund der Selbstkonsistenz des Systems mit den Zwangsbedingungen weitere Relationen zwischen den Kopplungskonstanten generiert werden, so dass es möglich ist, alle Kopplungen des Selbstwechselwirkungsterms mit vier

Vektorfeldern  $h^{abcd}$  ausschließlich durch Kopplungen des Selbstwechselwirkungsterms mit drei Vektorfeldern  $g^{abc}$  auszudrücken. Fordert man zusätzlich, dass alle UV-Divergenzen der Schleifenintegrale in der Redefinition von Massen, Kopplungskonstanten und Feldern absorbiert werden können, erhält man für (4.9) und (4.10) nur noch eine unabhängige Kopplungskonstante, nämlich

$$g^{abc} = g\epsilon^{abc}. \quad (4.11)$$

Die Anwendung der oben diskutierten Vorgehensweise auf die Lagrangedichte aus (4.2) generiert folgende Relationen zwischen den darin enthaltenen Kopplungen

$$g_1 = g_2 = \frac{g_0^2}{8}. \quad (4.12)$$

Damit vereinfacht sich die ursprüngliche Lagrangedichte (4.2) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V = & -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{V}^{\mu\nu}\mathcal{V}_{\mu\nu}) + \left[ M_\rho^2 + \frac{c_x}{4}\text{Tr}\chi_+ \right] \text{Tr}(V^\mu V_\mu) \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}}f_V\text{Tr}(V_{\mu\nu}f_+^{\mu\nu}) + f_\chi\text{Tr}\{V_\mu[u^\mu, \chi_-]\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit

$$\mathcal{V}^{\mu\nu} = \nabla^\mu V^\nu - \nabla^\nu V^\mu - ig_0[V^\mu, V^\nu]. \quad (4.14)$$

### 4.1.2 Feldredefinition

Das Äquivalenztheorem [43] besagt, dass physikalische Observable unabhängig von Feldredefinitionen sind. Um die Forderung nach Konsistenz mit den Zwangsbedingungen Ordnung für Ordnung zu erfüllen, führen wir folgende Feldredefinition durch

$$V_\mu = \rho_\mu - \alpha\Gamma_\mu, \quad (4.15)$$

wobei  $\alpha$  ein freier Parameter ist. Wählt man diesen Parameter folgendermaßen,

$$\alpha = \frac{i}{g_0}, \quad (4.16)$$

und benutzt die KSRF-Relation [44]

$$M_\rho^2 = 2g_0^2 F^2, \quad (4.17)$$

kann die störungstheoretische Renormierbarkeit erfüllt werden. In dieser Arbeit soll zusätzlich zum Rho-Meson-Triplett das Omega-Meson-Singulett  $\omega_\mu$  berücksichtigt werden. Setzt man die neuen Rho-Meson-Felder (4.15) sowie die Relationen (4.16) und (4.17) in (4.13) ein und nimmt das Omega-Meson

als dynamischen Freiheitsgrad hinzu, erhält man für die allgemeinste effektive Lagrangedichte mit Pionen, Rho- und Omega-Mesonen den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi\rho\omega} = & \frac{M_\rho^2 + c_x \text{Tr} [\chi_+]/4}{g_0^2} \text{Tr} [(g_0\rho^\mu - i\Gamma^\mu)(g_0\rho_\mu - i\Gamma_\mu)] \quad (4.18) \\
& - \frac{1}{2} \text{Tr} [\rho_{\mu\nu}\rho^{\mu\nu}] + id_x \text{Tr} [\rho_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}] \\
& + \frac{M_\omega^2 \omega_\mu\omega^\mu}{2} - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - f_\omega \omega^{\mu\nu} v_{\mu\nu}^{(s)} \\
& + g_{1\omega\rho\rho} \omega^\nu \partial_\nu \left[ \rho_\mu - \frac{i}{g_0} \Gamma_\mu \right] \left[ \rho^\mu - \frac{i}{g_0} \Gamma^\mu \right] \\
& + g_{2\omega\rho\rho} \omega_\nu \partial^\mu \left[ \rho_\mu - \frac{i}{g_0} \Gamma_\mu \right] \left[ \rho^\nu - \frac{i}{g_0} \Gamma^\nu \right] \\
& + \frac{1}{2} g_{\omega\rho\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \omega^\nu \text{Tr} [\rho^{\alpha\beta} u^\mu] + \dots,
\end{aligned}$$

mit

$$\rho_\mu = \rho_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, \quad (4.19)$$

$$\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu - ig_0 [\rho_\mu, \rho_\nu], \quad (4.20)$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu], \quad (4.21)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu. \quad (4.22)$$

Dabei sind nur die für die Berechnung der Formfaktoren bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  relevanten Terme berücksichtigt. Durch die Feldredefinition und die Wahl des Parameters  $\alpha$  wie in (4.16), liegen die Vektorfelder nun in der Weinberg'schen Parametrisierung vor. Die Rho-Mesonen transformieren inhomogen unter der chiralen Gruppe  $G$  [41]:

$$\rho_\mu \rightarrow K \rho_\mu K^\dagger + \frac{i}{g_0} K \partial_\mu K^\dagger, \quad (4.23)$$

und das Omega-Meson besitzt das folgende Transformationsverhalten

$$\omega_\mu \rightarrow \omega_\mu. \quad (4.24)$$

Zusätzlich zu  $\mathcal{L}_{\pi\rho\omega}$  benötigt man noch die Lagrangedichte für die Wechselwirkung zwischen Nukleonen, Rho- und Omega-Mesonen, die in führender Ordnung durch

$$\mathcal{L}_{N\rho\omega} = \bar{\Psi} \left( g_{\rho NN} \left[ \rho_\mu - \frac{i}{g_0} \Gamma_\mu \right] \gamma^\mu + \frac{1}{2} g_\omega \omega_\mu \gamma^\mu \right) \Psi \quad (4.25)$$

gegeben ist. In Referenz [24] wurde gezeigt, dass alleine aus der Forderung der störungstheoretischen Renormierbarkeit die Universalität der Rho-Meson-Kopplung

$$g_{\rho NN} = g_0 \tag{4.26}$$

folgt. Die Lagrangedichte für die Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Vektormesonen der nächst höheren Ordnung wurde in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, da wir von einer Unterdrückung der darin enthaltenen Kopplungskonstanten ausgehen.

### 4.1.3 Zählschema

Wie üblich wird in dieser Arbeit die Pion-Nukleon-Wechselwirkung als  $\mathcal{O}(q)$  gezählt. Die Nukleon-Rho-Wechselwirkung ist formal von der chiralen Ordnung  $\mathcal{O}(q^0)$ . Der daraus resultierende Entwicklungsparameter ist proportional zu einem Faktor  $1/(4\pi)^2$ , was dazu führt, dass wir den Nukleon-Rho-Vertex als  $\mathcal{O}(q^1)$  zählen. Aus dem gleichen Grund zählen wir die Nukleon-Omega-Wechselwirkung als  $\mathcal{O}(q^1)$ , die Drei-Rho-Selbstwechselwirkung als  $\mathcal{O}(q^2)$ , die Vier-Rho-Selbstwechselwirkung als  $\mathcal{O}(q^2)$ , die Rho-Omega-Pion-Wechselwirkung als  $\mathcal{O}(q^2)$  und die Omega-Rho-Rho-Wechselwirkung als  $\mathcal{O}(q^2)$ . Die Schleifenintegration in  $n$  Dimensionen zählt als  $\mathcal{O}(q^n)$ . Schließlich zählen wir den Rho-Meson-Propagator, den Omega-Meson-Propagator und den Pion-Propagator jeweils als  $\mathcal{O}(q^{-2})$  und den Nukleon-Propagator als  $\mathcal{O}(q^{-1})$ . In Referenz [37] wurde gezeigt, dass die Einbeziehung vektormesonischer Freiheitsgrade in eine manifest lorentzinvariante chirale Störungstheorie das Zählschema nicht verletzt, wenn man das EOMS-Renormierungsschema anwendet.

## 4.2 Einbau der Deltaresonanz

Die Deltaresonanz des Nukleons ist ein wichtiger Beleg für seine innere Struktur. Sie ist der erste angeregte Zustand des Nukleons und besitzt Spin  $\frac{3}{2}$  und Isospin  $\frac{3}{2}$ . Die Berücksichtigung der Deltaresonanz als expliziter dynamischer Freiheitsgrad in der baryonischen chiralen Störungstheorie scheint sinnvoll, da ihre Masse mit 1232 MeV nur etwas größer als die des Nukleons ist. Das EOMS-Renormierungsverfahren bietet die Möglichkeit der Konstruktion einer lorentzinvarianten effektiven Feldtheorie inklusive Freiheitsgrade der Deltaresonanz mit konsistentem Zählschema [45]. Im Folgenden werden die zur Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren unter Berücksichtigung der Deltaresonanz benötigten Lagrangedichten erläutert und das Zählschema vorgestellt.

### 4.2.1 Freie Lagrangedichte

Da die Deltaresonanz ein Teilchen mit Spin  $\frac{3}{2}$  ist, kann sie mit Hilfe des von W. Rarita und J. Schwinger entwickelten Formalismus beschrieben werden [46]. In diesem Formalismus werden Teilchen mit Spin  $k + \frac{1}{2}$  durch einen in seinen  $k$  Lorentzindizes vollständig symmetrischen Tensor  $\Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}}$  dargestellt. Jede einzelne Komponente des Tensors ist ein Diracspinor und erfüllt die Diracgleichung

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}} = 0. \quad (4.27)$$

Um die richtige Anzahl unabhängiger Komponenten des Tensorspinors zu garantieren, muss die folgende Zwangsbedingung erfüllt sein

$$\gamma^\alpha \Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}} = 0. \quad (4.28)$$

Durch Anwendung von  $\gamma^\alpha$  auf (4.27) und Verwendung der Zwangsbedingung (4.28) ergibt sich die weitere Zwangsbedingung

$$\partial^\alpha \Psi_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_{k-1}} = 0. \quad (4.29)$$

Die Deltaresonanz kann nun konkret durch das Rarita-Schwinger-Feld  $\Psi^\mu$  beschrieben werden. Die freie Lagrangedichte für ein Teilchen mit Spin  $3/2$  lautet dann

$$\mathcal{L}_{\frac{3}{2}} = -\bar{\Psi}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta}^A \Psi^\beta, \quad (4.30)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^A &= (i\cancel{\partial} - m)g_{\alpha\beta} + iA(\gamma_\alpha \partial_\beta + \gamma_\beta \partial_\alpha) \\ &\quad + \frac{i}{2}(3A^2 + 2A + 1)\gamma_\alpha \cancel{\partial} \gamma_\beta + m(3A^2 + 3A + 1)\gamma_\alpha \gamma_\beta. \end{aligned} \quad (4.31)$$

$A$  ist ein Parameter, der jeden beliebigen Wert außer  $-\frac{1}{2}$  annehmen kann. Er resultiert daraus, dass die Lagrangedichte, die auf die richtige Bewegungsgleichung mit den Zwangsbedingungen (4.28) und (4.29) führt, nicht eindeutig ist [47]. Man kann die Lagrangedichte (4.30) auch auf  $n$  Dimensionen verallgemeinern und erhält nach Referenz [48]

$$\mathcal{L}_{\frac{3}{2}} = -\bar{\Psi}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta}^{A,n} \Psi^\beta, \quad (4.32)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^{A,n} &= (i\cancel{\partial} - m)g_{\alpha\beta} + iA(\gamma_\alpha \partial_\beta + \gamma_\beta \partial_\alpha) \\ &\quad + \frac{i}{n-2}((n-1)A^2 + 2A + 1)\gamma_\alpha \cancel{\partial} \gamma_\beta \\ &\quad + \frac{m}{(n-2)^2}(n(n-1)A^2 + 4(n-1)A + n)\gamma_\alpha \gamma_\beta, \quad \text{mit } n \neq 2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Man sieht, wie für  $A = -1$  die explizite Abhängigkeit von  $n$  aus (4.32) verschwindet.

Um auch den Isospinanteil der Deltaresonanz beschreiben zu können, definiert man die aus der Kopplung von Isospin  $\frac{1}{2}$  mit Isospin 1 entstehenden Isektor-Isospinor-Felder

$$\Psi_{\mu,i} = \begin{pmatrix} \Psi_{\mu,i,\frac{1}{2}} \\ \Psi_{\mu,i,-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.34)$$

Nun tritt ein Problem auf: Die Deltaresonanz ist ein Teilchen mit Isospin  $\frac{3}{2}$ , d.h. sie besitzt vier Freiheitsgrade im Isospinraum. Die Beschreibung von Gleichung (4.34) liefert aber sechs Isospinfreiheitsgrade, da man durch die Clebsch-Gordan-Zerlegung des direkten Produkts aus dem Isospin- $\frac{1}{2}$ -Raum und dem Isospin-1-Raum nicht nur eine Isospin- $\frac{3}{2}$ -Komponente sondern zusätzlich eine Isospin- $\frac{1}{2}$ -Komponente erhält. Um die zwei überflüssigen Freiheitsgrade zu eliminieren, führt man den Projektionsoperator

$$P_{ij,\alpha\beta}^{\frac{3}{2}} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}(\tau_i\tau_j)_{\alpha\beta} \quad (4.35)$$

ein. Die freie Lagrangedichte in führender Ordnung ist nun gegeben durch [49]

$$\mathcal{L}_{\Delta}^{(1)} = -\bar{\Psi}^{\mu} P^{\frac{3}{2}} \Lambda_{\mu\nu}^A P^{\frac{3}{2}} \Psi^{\nu}, \quad (4.36)$$

wobei alle Isospinindizes unterdrückt wurden. Durch die Multiplikation der Felder  $\Psi_{i,\alpha}^{\mu}$  mit den Projektionsoperatoren werden die vier physikalischen Isospinfreiheitsgrade herausprojiziert. Dies hat die Invarianz der Lagrangedichte unter den lokalen Transformationen der Felder

$$\Psi_i^{\mu}(x) \rightarrow \Psi_i^{\mu}(x) + \tau_i \alpha^{\mu}(x) \quad (4.37)$$

zur Folge. Um das System quantisieren zu können, ist es somit notwendig eine Eichbedingung einzuführen. Wir wählen hier

$$\tau_i \Psi_i^{\mu} = 0. \quad (4.38)$$

## 4.2.2 Wechselwirkungslagrangedichten

Das Delta-Feld  $\Psi_{\mu,i}$  transformiert unter der lokalen  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie wie [50]

$$\Psi_{\mu,i,\alpha} \rightarrow \Psi'_{\mu,i,\alpha} = \exp(-i\theta) \mathcal{K}_{ij,\alpha\beta} \Psi_{\mu,j,\beta} \quad (4.39)$$

mit

$$\mathcal{K}_{ij,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\tau_i K \tau_j K^\dagger) K_{\alpha\beta}. \quad (4.40)$$

Dabei stellt  $K$  den in (2.44) definierten Kompensator dar.

Die kovariante Ableitung  $(D_\mu \Psi)_{\nu,i,\alpha}$  ist durch

$$(D_\mu \Psi)_{\nu,i,\alpha} := \mathcal{D}_{\mu,ij,\alpha\beta} \Psi_{\nu,j,\beta}, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{D}_{\mu,ij,\alpha\beta} = \partial_\mu \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} - 2i \epsilon_{ijk} \Gamma_{\mu,k} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{ij} \Gamma_{\mu,\alpha\beta} - i v_\mu^{(s)} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}$$

gegeben, wobei hier die Parametrisierung  $\Gamma_\mu = \tau_k \Gamma_{\mu,k}$  verwendet wird.

Mit diesen Bausteinen lässt sich nun analog Referenz [49] die Pion-Delta-Lagrangedichte in niedrigster Ordnung bestimmen:

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta} = -\bar{\Psi}_\mu P^{\frac{3}{2}} \Lambda^{\mu\nu} P^{\frac{3}{2}} \Psi_\nu, \quad (4.42)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu} = & (i\not{D} - m_\Delta) g_{\mu\nu} + iA(\gamma_\mu \not{D}_\nu + \gamma_\nu \not{D}_\mu) \\ & + \frac{i}{2}(3A^2 + 2A + 1) \gamma_\mu \not{D} \gamma_\nu + m_\Delta(3A^2 + 3A + 1) \gamma_\mu \gamma_\nu \\ & + \frac{g_1}{2} \not{\psi} \gamma_5 g_{\mu\nu} + \frac{g_2}{2} (\gamma_\mu u_\nu + u_\mu \gamma_\nu) + \frac{g_3}{2} \gamma_\mu \not{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die Lagrangedichte (4.42) beschreibt ein System mit Zwangsbedingungen (4.28). Folglich sind die Kopplungskonstanten nicht voneinander unabhängig. In Referenz [51] wurde gezeigt, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$g_2 = A g_1, \quad g_3 = -\frac{1 + 2A + A^2(n-1)}{n-2} g_1. \quad (4.44)$$

Zur Berechnung der Formfaktoren benötigt man insbesondere die Pion-Delta-Nukleon-Lagrangedichte. Sie ist in führender Ordnung gegeben durch [52]

$$\mathcal{L}_{\pi N \Delta}^{(1)} = -g_\Delta \bar{\Psi}_{\mu,i} P_{ij}^{\frac{3}{2}} (g^{\mu\nu} + \tilde{z} \gamma^\mu \gamma^\nu) u_{\nu,j} \Psi + h.c., \quad (4.45)$$

wobei  $\tilde{z}$  eine Kopplungskonstante ist und die Parametrisierung  $u_\mu = \tau_k u_{\mu,k}$  gewählt wurde. Aus den oben erwähnten Konsistenzbedingungen folgt für  $\tilde{z}$  die Gleichung [53]

$$\tilde{z} = \frac{1}{2}(1 + 3A). \quad (4.46)$$

Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, wird der Parameter  $A = -1$  gesetzt. Mit dieser Wahl ergibt sich  $\tilde{z} = -1$ .

### 4.2.3 Zählschema

In dieser Arbeit wird das Zählschema aus den Referenzen [54] und [55] verwendet, d.h. wir zählen die Wechselwirkungsindizes aus der  $\mathcal{O}(q^n)$ -Lagrange-dichte als  $\mathcal{O}(q^n)$ , Pion-Propagatoren als  $\mathcal{O}(q^{-2})$ , Nukleon- und Delta-Propagatoren als  $\mathcal{O}(q^{-1})$  und Schleifenintegrationen in  $n$  Dimensionen als  $\mathcal{O}(q^n)$ . Die Massendifferenz  $\delta = m_\Delta - m_N$  zwischen der Deltaresonanz und dem Nukleon wird als  $\mathcal{O}(q)$  gezählt (*small scale expansion*) [56]. Wie in Referenz [45] gezeigt wurde, ist dieses Zählschema konsistent mit den Ergebnissen von Schleifendiagrammen, die mit Hilfe des EOMS-Verfahrens renormiert wurden.

# Kapitel 5

## Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons

Elektromagnetische Formfaktoren liefern wichtige Informationen über die Struktur und Zusammensetzung des Nukleons. Sie sind messbare physikalische Größen, mit deren Hilfe sich die Konstituenten des Nukleons und die Dynamik der Bindungen erforschen lassen. Aus der Kenntnis der Formfaktoren lassen sich magnetische Momente sowie Ladungs- und Magnetisierungsverteilung ableiten.

### 5.1 Definition der Formfaktoren

Die elektromagnetische Struktur des Nukleons lässt sich durch je zwei Formfaktoren für das Proton und das Neutron parametrisieren. Die elektromagnetischen Formfaktoren sind über das Matrixelement des elektromagnetischen Stromoperators  $J^\mu$ , ausgewertet zwischen einem Nukleon-Anfangs- und Endzustand, definiert

$$\langle N(p_f) | J^\mu(0) | N(p_i) \rangle, \quad (5.1)$$

wobei  $q^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$  den Impulsübertrag und  $t = (p_f - p_i)^2 = q^2 \leq 0$  dessen „Quadrat“ darstellt.

Der elektromagnetische Stromoperator  $J^\mu$  ist unter Vernachlässigung der Beiträge von schweren Quarks gegeben durch

$$J^\mu(x) = \frac{2}{3} \bar{u}(x) \gamma^\mu u(x) - \frac{1}{3} \bar{d}(x) \gamma^\mu d(x) = \bar{q}(x) Q \gamma^\mu q(x). \quad (5.2)$$

Dabei steht  $Q$  für die Quarkmassenmatrix und hat folgende Gestalt:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} + \frac{\tau_3}{2}. \quad (5.3)$$

$J^\mu$  besitzt also sowohl einen isoskalaren Anteil als auch einen Anteil, der wie die dritte Komponente eines Isektors transformiert. Außerdem transformiert  $J^\mu$  unter Parität und Ladungskonjugation wie

$$J^\mu(x) \xrightarrow{P} J_\mu(Px), \quad J^\mu(x) \xrightarrow{C} -J^\mu(x), \quad (5.4)$$

wobei  $(Px)^\mu = (x_0, -\vec{x}) = x_\mu$ .

Das in (5.1) definierte Matricelement kann man allgemein auf folgende Weise parametrisieren:

$$\langle N(p_f) | J^\mu(0) | N(p_i) \rangle = \bar{u}(p_f) \left[ \gamma^\mu F_1^N(Q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} F_2^N(Q^2) \right] u(p_i), \quad (5.5)$$

wobei  $Q^2 = -q^2$  eingeführt wurde. Eine dritte denkbare Struktur proportional zu  $q^\mu$  tritt aufgrund des Stromerhaltes nicht auf. Für  $Q^2 \geq 0$  müssen  $F_1^N(Q^2)$  und  $F_2^N(Q^2)$  reelle Funktionen sein, da der Operator  $J^\mu$  hermitesch ist.

$F_1^N(Q^2)$  bezeichnet man als Dirac-Formfaktor und  $F_2^N(Q^2)$  als Pauli-Formfaktor. An der Stelle  $Q^2 = 0$  geben sie jeweils die Ladung in Einheiten der Elementarladung  $e > 0$  bzw. das anomale magnetische Moment in Einheiten des Kernmagnetons an:

$$F_1^p(0) = 1, \quad F_2^p(0) = 1,793, \quad F_1^n(0) = 0, \quad F_2^n(0) = -1,913. \quad (5.6)$$

Anstatt mit Protonen und Neutronen zu rechnen, kann es hilfreich sein die Isospinsymmetrie (siehe Anhang B) zu nutzen. Der isoskalare und der isovektorielle Anteil der Formfaktoren ist gegeben durch:

$$F_i^{(s)} = F_i^p + F_i^n, \quad F_i^{(v)} = F_i^p - F_i^n, \quad i = 1, 2. \quad (5.7)$$

Die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons erhält man dann im Isospinraum durch folgende Formel:

$$F_i^N = \frac{1}{2} F_i^{(s)} + \frac{\tau_3}{2} F_i^{(v)}. \quad (5.8)$$

Üblicherweise werden anstatt der Pauli- und Dirac-Formfaktoren die Sachs-Formfaktoren angegeben, da man diese mit Hilfe der Rosenbluthzerlegung leicht aus den Daten für den Wirkungsquerschnitt herausprojizieren kann. Sie sind gegeben durch:

$$G_E^N(Q^2) = F_1^N(Q^2) - \frac{Q^2}{4m_N^2} F_2^N(Q^2), \quad (5.9)$$

$$G_M^N(Q^2) = F_1^N(Q^2) + F_2^N(Q^2).$$

Im Breit-System, welches für elastische Streuung mit dem Elektron-Nukleon-Schwerpunktsystem übereinstimmt, nimmt das Matrixelement des Stromoperators eine besonders einfache Gestalt an. In diesem Bezugssystem hat das einlaufende Elektron den Impuls  $\vec{p} = +\frac{\vec{q}}{2}$  und das Nukleon den Impuls  $\vec{P} = -\frac{\vec{q}}{2}$ . Das gestreute Elektron hat den Impuls  $\vec{p}' = -\frac{\vec{q}}{2}$  und das Nukleon erhält den Rückstoß  $\vec{P}' = +\frac{\vec{q}}{2}$ . Es wird keine Energie übertragen, so dass für das ausgetauschte Photon gilt  $q^\mu = (0, \vec{q})$ . Die Matrixelemente des Stromoperators lauten somit im Breit-System:

$$\begin{aligned}\langle N(\vec{q}/2) | J^0(0) | N(-\vec{q}/2) \rangle &= G_E(\vec{q}^2), \\ \langle N(\vec{q}/2) | \vec{J}(0) | N(-\vec{q}/2) \rangle &= i \frac{\vec{\sigma} \times \vec{q}}{2m_N} G_M(\vec{q}^2).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Man kann die Sachs-Formfaktoren  $G_E$  und  $G_M$  als Fouriertransformierte der Ladungs- und Magnetisierungsverteilung interpretieren.

## 5.2 Wellenfunktionsrenormierungskonstante

In diesem Abschnitt wird die Wellenfunktionsrenormierungskonstante (WFRK) des Nukleons  $Z_N$  bestimmt. Sie wird benötigt, da man die Vertexfunktionen für jede äußere Linie mit  $\sqrt{Z_N}$  multiplizieren muss, um die physikalischen Amplituden zu erhalten [32].

### 5.2.1 Definition der WFRK

Als Ausgangspunkt betrachten wir den Nukleon-Propagator, der als Fouriertransformierte der Green'schen Zweipunktfunktion definiert ist:

$$iS_N(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T [\psi_0(x) \bar{\psi}_0(0)] | 0 \rangle,\tag{5.11}$$

wobei der Index 0 anzeigt, dass es sich um nackte, d.h. nicht renormierte, Felder handelt. In niedrigster Ordnung erhält man für den Nukleon-Propagator

$$iS_{N0}(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i0^+}.\tag{5.12}$$

Dabei steht  $m$  hier für die Nukleonmasse im chiralen Grenzfall. Der volle Propagator lässt sich als Summe über die sogenannten Selbstenergieeinschübe darstellen:

$$\begin{aligned}iS_N(p) &= iS_{N0}(p) + iS_{N0}(p)(-i\Sigma(\not{p}))iS_{N0}(p) + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p}) + i0^+}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

$-i\Sigma(\not{p})$  steht für die Summe aller eiteilchenirreduziblen Diagramme einschließlich Gegenterme. Die physikalische Masse  $m_N$  ist als Polposition des Propagators definiert und folglich durch den Ausdruck

$$m_N - m - \Sigma(m_N) = 0 \quad (5.14)$$

gegeben. Entwickelt man  $\Sigma(\not{p})$  um einen beliebigen Punkt  $\Lambda$ , erhält man

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(\Lambda) + (\not{p} - \Lambda)\Sigma'(\Lambda) + \widetilde{\Sigma}(\not{p}), \quad (5.15)$$

wobei  $\widetilde{\Sigma}(\not{p})$  den von  $\Lambda$  abhängigen Rest darstellt, für den gilt

$$\widetilde{\Sigma}(\Lambda) = \widetilde{\Sigma}'(\Lambda) = 0. \quad (5.16)$$

Setzt man die Entwicklung aus (5.15) in die Gleichung (5.13) ein, ergibt sich für den Propagator:

$$iS_N(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\Lambda) - (\not{p} - \Lambda)\Sigma'(\Lambda) - \widetilde{\Sigma}(\not{p}) + i0^+}. \quad (5.17)$$

Wählt man nun  $\Lambda = m_N$  und wendet Gleichung (5.14) an, so kann die obige Formel folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} iS_N(p) &= \frac{i}{(\not{p} - m_N)[1 - \Sigma'(m_N)] - \widetilde{\Sigma}(\not{p}) + i0^+} \\ &= \frac{iZ_N}{(\not{p} - m_N) - Z_N\widetilde{\Sigma}(\not{p}) + i0^+}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dabei wurde die Wellenfunktionsrenormierungskonstante  $Z_N$  eingeführt. Sie stellt das Residuum des vollständigen Propagators zu dem Pol  $m_N$  dar und ist durch die Gleichung

$$Z_N = \frac{1}{1 - \Sigma'(m_N)} \quad (5.19)$$

definiert.

## 5.2.2 Berechnung der WFRK

Um die Wellenfunktionsrenormierungskonstante konkret zu bestimmen, ist es zunächst nötig alle Selbstenergiebeiträge bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  zu berechnen. Auf Einschleifenniveau erhält man die WFRK aus der Beziehung

$$\begin{aligned} Z_N &= 1 + \left. \frac{\partial \Sigma(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_N} \\ &\equiv 1 + \Sigma'(m_N). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Alle Diagramme, die bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  beitragen, sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Ergebnisse der einzelnen Selbstenergiendiagramme sind

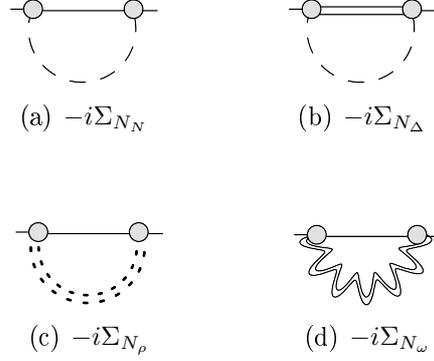


Abbildung 5.1: Selbstenergiendiagramme bis  $\mathcal{O}(q^3)$ : Hierbei stehen einfach durchgezogene Linien für Nukleonen, doppelt durchgezogene Linien für Deltaresonanzen, gestrichelte Linien für Pionen, doppelt gestrichelte Linien für Rho-Mesonen und doppelt geschlängelte Linien für Omega-Mesonen.

in Anhang D.4 aufgeführt. Bildet man davon die Ableitungen  $\left. \frac{\partial \Sigma(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m_N}$ , so erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\Sigma'_{NN} = \frac{-3g_A^2}{64F^2(4m_N^2 - M_\pi^2)\pi^2} \left( -4M_\pi^2 A_0(m_N^2) - (12m_N^2 - 5M_\pi^2) A_0(M_\pi^2) + 4M_\pi^2 (m_N^2 + (3m_N^2 - M_\pi^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2)) \right),$$

$$\Sigma'_{N\rho} = \frac{-9g_0^2}{64(4M_\rho^2 m_N^4 - m_N^2 M_\rho^4)\pi^2} \left( (-4m_N^4 - M_\rho^2 m_N^2 + M_\rho^4) A_0(M_\rho^2) - A_0(m_N^2) M_\rho^4 - (M_\rho^6 - 2m_N^2 M_\rho^4 - 4m_N^4 M_\rho^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) + m_N^2 M_\rho^4 \right),$$

$$\Sigma'_{N\omega} = \frac{-3g_\omega^2}{64(4M_\omega^2 m_N^4 - m_N^2 M_\omega^4)\pi^2} \left( (-4m_N^4 - M_\omega^2 m_N^2 + M_\omega^4) A_0(M_\omega^2) - A_0(m_N^2) M_\omega^4 - (M_\omega^6 - 2m_N^2 M_\omega^4 - 4m_N^4 M_\omega^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) + m_N^2 M_\omega^4 \right),$$

$$\begin{aligned}
\Sigma'_{N\Delta} = & \frac{g_\Delta^2}{576F^2m_\Delta^2m_N^2\pi^2}m_N^2(-9m_\Delta^4 - 48m_Nm_\Delta^3 - 12m_N^2m_\Delta m_\Delta^2 \\
& + 40m_N^3 + 22m_N^4 + 9M_\pi^4 - 48m_N(m_\Delta + m_N)M_\pi^2) \\
& + 6(m_\Delta + m_N - M_\pi)(m_\Delta + m_N + M_\pi)(3m_\Delta^4 - 2m_Nm_\Delta^3 \\
& + 2(m_N^2 - 3M_\pi^2)m_\Delta^2 + 2m_N(m_N^2 + M_\pi^2)m_\Delta - 5m_N^4 + 3M_\pi^4 \\
& + 2m_N^2M_\pi^2)B_0(m_N^2, m_\Delta^2, M_\pi^2) - 6(3m_\Delta^4 + 4m_Nm_\Delta^3 + m_N^2m_\Delta^2 \\
& - 8m_N^3m_\Delta - 5m_N^4 + 3M_\pi^4 - 2(3m_\Delta - m_N)(m_\Delta + m_N)M_\pi^2) \\
& \times A_0(m_\Delta^2) + 6(3m_\Delta^4 + 4m_Nm_\Delta^3 + (4m_N^2 - 6M_\pi^2)m_\Delta^2 \\
& + (8m_N^3 - 4m_NM_\pi^2)m_\Delta + 5m_N^4 + 3M_\pi^4 - m_N^2M_\pi^2)A_0(M_\pi^2).
\end{aligned}$$

Dabei wurden die skalaren Integrale  $A_0(m^2)$  und  $B_0(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$  verwendet, deren Definition sich in Anhang D.1 findet. Die WFRK des Nukleons ist durch den folgenden Ausdruck gegeben

$$Z_N = 1 + \left[ \Sigma'_{NN} + \Sigma'_{N\Delta} + \Sigma'_{N\rho} + \Sigma'_{N\omega} \right]. \quad (5.21)$$

## 5.3 Formfaktoren mit Vektormesonen als explizite Freiheitsgrade

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons unter expliziter Berücksichtigung der Vektormesonen als dynamische Freiheitsgrade. Zuerst werden die zu diesem Prozess beitragenden Diagramme präsentiert und anschließend erläutert, wie man bei der Bestimmung der Formfaktoren konkret vorgeht. Im zweiten Teil werden die Ergebnisse graphisch dargestellt, diskutiert und mit anderen Rechnungen verglichen.

### 5.3.1 Bestimmung der Formfaktoren

In Abbildung 5.2 sind die zur Berechnung der Formfaktoren bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  benötigten Diagramme dargestellt. Die Vertizes wurden dabei aus den in Kapitel 4.1 vorgestellten Lagrangedichten hergeleitet, die Ordnungen der Diagramme basieren auf dem dort präsentierten Zählchema. Zahlen in Vertizes geben deren Ordnung an. Handelt es sich um Vertizes der niedrigsten Ordnung, wurden Zahlen weggelassen. Die Ordnungen der einzelnen Vertices finden sich in Anhang C.2.

Zur Bestimmung der Formfaktoren berechnet man die invariante Amplitude  $\mathcal{M}_J$  der Diagramme. Sie ist durch folgende Formel mit dem Matrixelement aus Gleichung (5.1) verknüpft:

$$i\mathcal{M}_J = e\epsilon_\mu \langle N(p_f) | J^\mu(0) | N(p_i) \rangle. \quad (5.22)$$

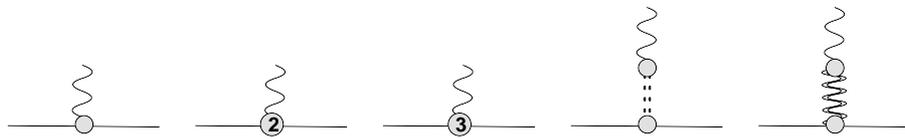
Dabei steht  $\epsilon_\mu$  für den Polarisationsvektor des virtuellen Photons. Da dieser von der Ordnung  $\mathcal{O}(q)$  gezählt wird, erhält man bei einer Rechnung bis Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  den Dirac-Formfaktor  $F_1$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$  und den Pauli-Formfaktor  $F_2$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q)$ . Bei Kombination dieser beiden Formfaktoren zu den Sachs-Formfaktoren tritt eine Mischung der Ordnungen auf (s. Gleichung (5.10)). Wenn wir im Folgenden von der Berechnung der Sachs-Formfaktoren bis zur dritten Ordnung sprechen, ist damit diejenige Ordnung gemeint, bis zu der die Diagramme berücksichtigt wurden.

Die nichtrenormierten Beiträge zum Dirac-Formfaktor  $F_1$  und zum Pauli-Formfaktor  $F_2$  sind in Anhang D.2.1 aufgelistet. Zur algebraischen Vereinfachung der Diagramme wurde das *Mathematica*-Paket *FeynCalc* [57] und darauf basierende, von Dalibor Djukanovic entwickelte Programme [58] verwendet. Zur numerischen Auswertung der Diagramme wurde das Programm *LoopTools* [59] angewendet.

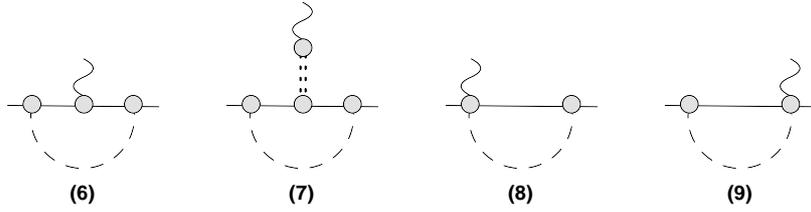
Die Renormierung der Diagramme findet in zwei Schritten statt: Zuerst wird das  $\overline{MS}$ -Schema angewendet, um die Divergenzen zu absorbieren. Danach werden zusätzlich mit dem EOMS-Schema diejenigen endlichen Teile abgezogen, die das Zählschema verletzen. Um diese Anteile zu identifizieren, entwickelt man die Integrale und Koeffizienten in kleinen Parametern und bestimmt die Terme, die von niedrigerer Ordnung sind als durch das Zählschema vorhergesagt. Die expliziten Ausdrücke für die Abzugsterme sind in Anhang D.2.1 gegeben.

Um die gesamten Beiträge zum Dirac- und Pauli-Formfaktor zu erhalten, addiert man die einzelnen Beiträge der Diagramme, subtrahiert die entsprechenden Gegenterme und multipliziert das Ergebnis mit der Wellenfunktionsrenormierungskonstanten  $\widetilde{Z}_N$ . Diese erhält man aus Gleichung (5.21), indem man das Selbstenergiendiagramm mit Deltaresonanz nicht berücksichtigt.

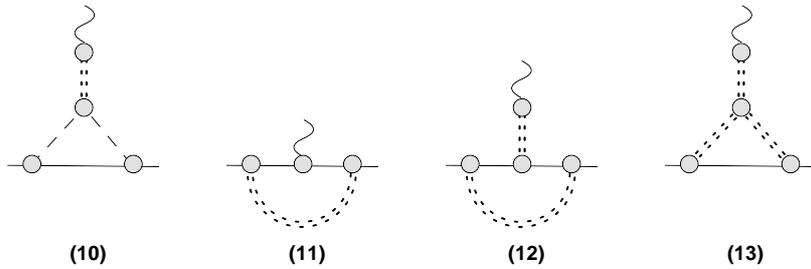
$$\widetilde{Z}_N = 1 + \left[ \Sigma'_{N_N} + \Sigma'_{N_\rho} + \Sigma'_{N_\omega} \right]. \quad (5.23)$$



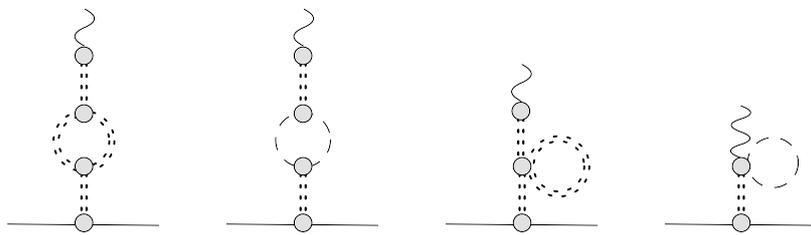
(1) (2) (3) (4) (5)



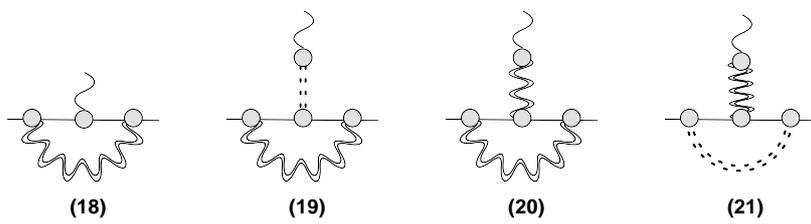
(6) (7) (8) (9)



(10) (11) (12) (13)



(14) (15) (16) (17)



(18) (19) (20) (21)

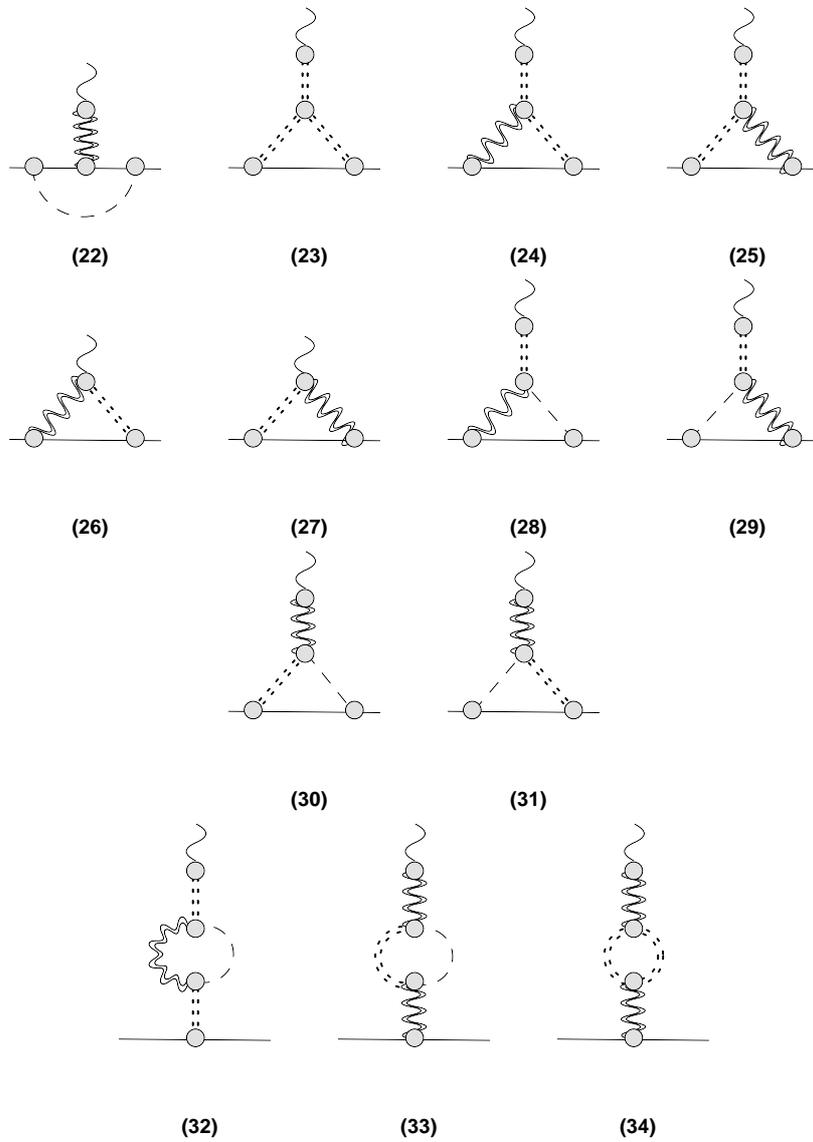


Abbildung 5.2: Feynmandiagramme ohne Deltaresonanz, die zu den elektromagnetischen Formfaktoren bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  beitragen. Durchgezogene Linien stehen für Nukleonen, gestrichelte Linien für Pionen, geschlängelte Linien für Photonen, doppelt gestrichelte Linien für Rho-Mesonen und doppelt geschlängelte Linien für Omega-Mesonen.

Zur graphischen Darstellung der Formfaktoren benötigt man zum einen die Werte der Vektormesonkopplungskonstanten  $g$ ,  $g_\omega$ ,  $f_\omega$ ,  $g_{2\omega\rho\rho}$ ,  $g_{\omega\pi\pi}$  und zum anderen die Kopplungskonstanten der Baumdiagramme  $c_6$ ,  $c_7$ ,  $d_6$ ,  $d_7$ ,  $d_x$ . Für  $g_{\omega\pi\pi}$  benutzen wir den Wert aus Referenz [60]

$$g_{\omega\pi\pi} = 16 \text{ MeV}^{-1} \quad (5.24)$$

und schätzen  $g$  über die KSFR-Relation (s. Gleichung (4.17)) zu

$$g = 6. \quad (5.25)$$

Die Werte für die verbleibenden Kopplungskonstanten werden auf zwei unterschiedliche Arten bestimmt.

Bei der ersten Methode wird zunächst eine Anpassung von  $c_6$  und  $c_7$  an das magnetische Moment des Protons und des Neutrons vorgenommen. Die restlichen Niederenergiekonstanten werden durch einen nichtlinearen Fit mit dem Programm *Mathematica* und dem darin vorhandenen Befehl *Nonlinear-Regress* bestimmt. Die Rechnungen werden dabei an die Messdaten zu den elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren aus Referenz [61] angepasst. Bei der zweiten Art die Kopplungskonstanten zu bestimmen wurde auf die Anpassung von  $c_6$  und  $c_7$  an das magnetische Moment des Protons und des Neutrons verzichtet. Es wurden alle Konstanten genutzt, um eine Anpassung der Rechnung an die Messdaten vorzunehmen. Die aus den beiden Methoden resultierenden Werte für die Kopplungskonstanten sind in Tabelle (5.1) aufgelistet.

	$c_6$	$c_7$	$d_6$	$d_7$
Methode 1	1.34	-0.07	3.19	-0.65
Methode 2	1.27	-0.23	2.68	-0.58
	$d_x$	$g_\omega$	$f_\omega$	$g_{2\omega\rho\rho}$
Methode 1	-1.14	-5.41	0.10	0.001
Methode 2	-0.95	8.32	-0.05	0.001

Tabelle 5.1: Werte der Kopplungskonstanten

Für beide Bestimmungsmethoden steht eine große Anzahl unbekannter Konstanten als Fit-Parameter zur Verfügung. Da zur Bestimmung dieser Konstanten eine nichtlineare Regression durchgeführt wird, tritt folgendes Problem in Erscheinung: Bei Minimierung des reduzierten  $\chi^2$  könnte es sich nur um ein lokales Minimum handeln, so dass nicht sicher ist, ob die errechneten Kopplungskonstanten die bestmögliche Anpassung unserer Ergebnisse an die Messdaten liefern.

Auffällig ist die große Abweichung der durch beide Methoden ermittelten Zahlenwerte für  $g_\omega$  beziehungsweise  $f_\omega$ . Betrachtet man allerdings das Produkt aus den beiden Konstanten, so wie es hauptsächlich in den berechneten Diagrammen vorkommt, erhält man für die erste Methode  $g_\omega f_\omega \approx -0,51$  und für die zweite Methode  $g_\omega f_\omega \approx -0,42$ . Die Produkte stimmen also näherungsweise überein und die großen Unterschiede der Zahlenwerte der Faktoren deuten darauf hin, dass bei mindestens einer der beiden Methoden nur ein lokales Minimum des reduzierten  $\chi^2$  ermittelt wurde.

### 5.3.2 Ergebnisse der Formfaktoren

In Abbildung 5.3 sind die Sachs-Formfaktoren aus der Rechnung bis Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  zusammen mit den experimentellen Daten aufgetragen. Beide Bestimmungsmethoden für die Kopplungskonstanten liefern sehr ähnliche Kurvenverläufe, was vor allem daran liegen könnte, dass die Konstanten  $d_6$ ,  $d_7$  und  $d_x$  in beiden Methoden als Fit-Parameter verwendet werden. Die Konstanten tragen zu den elektrischen und magnetischen Radien der Nukleonen bei und haben daher einen entscheidenden Einfluss auf die Steigung.

Der elektrische Formfaktor des Protons stimmt im dargestellten Impulsbereich von  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.6 \text{ GeV}^2$  für beide Methoden gut mit den Daten überein, wenngleich er eine etwas zu starke Krümmung aufweist. Auch der magnetische Formfaktor des Protons zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Daten. Für den magnetischen Formfaktor des Neutrons ist die von unseren Rechnungen generierte Krümmung in beiden Fällen ein wenig zu schwach, um die Daten so gut wie für  $G_E^p$  und  $G_M^p$  beschreiben zu können. Durch Fixierung von  $c_6$  und  $c_7$  an die anomalen magnetischen Momente scheint bei der Datenanpassung eine stärkere Krümmung für sehr kleine Werte von  $Q^2$  generiert worden zu sein. Dadurch liefert die erste Methode eine geringfügig bessere Beschreibung des magnetischen Neutron-Formfaktors. Der elektrische Formfaktor des Neutrons nimmt im dargestellten Bereich nur sehr kleine Werte an, weshalb den Beiträgen höherer Ordnung eine entscheidende Bedeutung zukommt [62]. Da die Rechnung nur bis zur dritten Ordnung durchgeführt wurde, ist es nicht verwunderlich, dass die Kurven für  $G_E^n$  schlecht mit den experimentellen Daten übereinstimmen und schon für  $Q^2 \approx 0.35 \text{ GeV}^2$  negative Werte annehmen.

Erwartungsgemäß zeigen die Graphen von  $G_E^n$ ,  $G_M^p$  und  $G_M^n$  im Gegensatz zu Rechnungen ohne Vektormesonen (siehe beispielsweise Referenz [62]) die notwendige Krümmung, um eine adäquate Beschreibung der Messdaten zu gewährleisten. Obwohl Resultate mit und ohne Vektormesonen für eine gegebene Ordnung im Hinblick auf eine chirale Entwicklung nach kleinen Impulsen  $q$  und Quarkmassen  $m_q$  bei festem Quotienten  $m_q/q^2$  äquivalent sind,

bewirkt die Hinzunahme von Vektormesonen eine Umordnung der Terme, die in einer gewöhnlichen chiralen Entwicklung erst bei höheren Ordnungen auftauchen [23]. Diese Terme ermöglichen die Beschreibung der Formfaktoren auch für größere Werte von  $Q^2$ . Nach Überprüfung wurde festgestellt, dass alle Schleifenbeiträge, insbesondere auch diejenigen mit Vektormesonlinien, gegenüber den Baumgraphenbeiträgen unterdrückt sind. Demzufolge sind es hauptsächlich die Baumgraphen (4) und (5), die zu einer verbesserten Beschreibung der Formfaktoren führen.

Der Vollständigkeit halber ist in Anhang D.3, Abbildung D.1 der Verlauf der Dirac- und Pauli-Formfaktoren im Impulsbereich  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.6 \text{ GeV}^2$  dargestellt. Hierbei wurden wieder die Kopplungskonstanten aus Tabelle 5.1 verwendet. Die Ergebnisse stimmen in beiden Methoden gut überein.

Schließlich wollen wir unsere Ergebnisse mit zwei weiteren lorentzinvarianten Rechnungen in chiraler Störungstheorie mit expliziter Berücksichtigung von Vektormesonen vergleichen. Dazu werden zunächst die Unterschiede zwischen den Rechnungen dargestellt. Zum Vergleich werden aus dieser Arbeit die Sachs-Formfaktoren, deren Kopplungskonstanten mit der ersten Methode bestimmt wurden, herangezogen.

In Referenz [19] wurden die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons bis zur dritten und vierten chiralen Ordnung analysiert. Die Rechnungen wurden in  $SU(3)$  durchgeführt und zusätzlich zu den Rho-Mesonen und dem Omega-Meson wurde noch das Phi-Meson als expliziter Freiheitsgrad betrachtet. Zur Einbeziehung der Vektormesonen wurde die Tensorfelddarstellung aus Referenz [41] verwendet, zur Renormierung die Infrarotregularisierung. Hierbei konnten wegen Fehlens eines konsistenten Zählschemas nur Diagramme ohne Vektormesonschleifen berücksichtigt werden. In Referenz [23] wurde eine  $SU(2)$ -Rechnung der Formfaktoren bis zur vierten chiralen Ordnung durchgeführt. Auch hier wurde außer den Rho-Mesonen und dem Omega-Meson das Phi-Meson als expliziter Freiheitsgrad eingebaut, wozu die Vektorfelddarstellung aus Referenz [41] verwendet wurde. Als Renormierungsschema wurde wie in dieser Arbeit das EOMS-Schema benutzt, welches aufgrund der Existenz eines konsistenten Zählschemas die Betrachtung der Diagramme mit Vektormesonschleifen ermöglicht. Die in Kapitel 4.1 diskutierten Konsistenzbedingungen blieben in beiden anderen Rechnungen unberücksichtigt. Im Gegensatz zu dieser Arbeit wurden die Niederenergiekonstanten nicht gleichzeitig durch Fits an die experimentellen Daten bestimmt, sondern soweit möglich an die elektrischen und magnetischen Radien angepasst. Für die übrigen Konstanten wurden Ergebnisse aus dispersionstheoretischen Analysen übernommen.

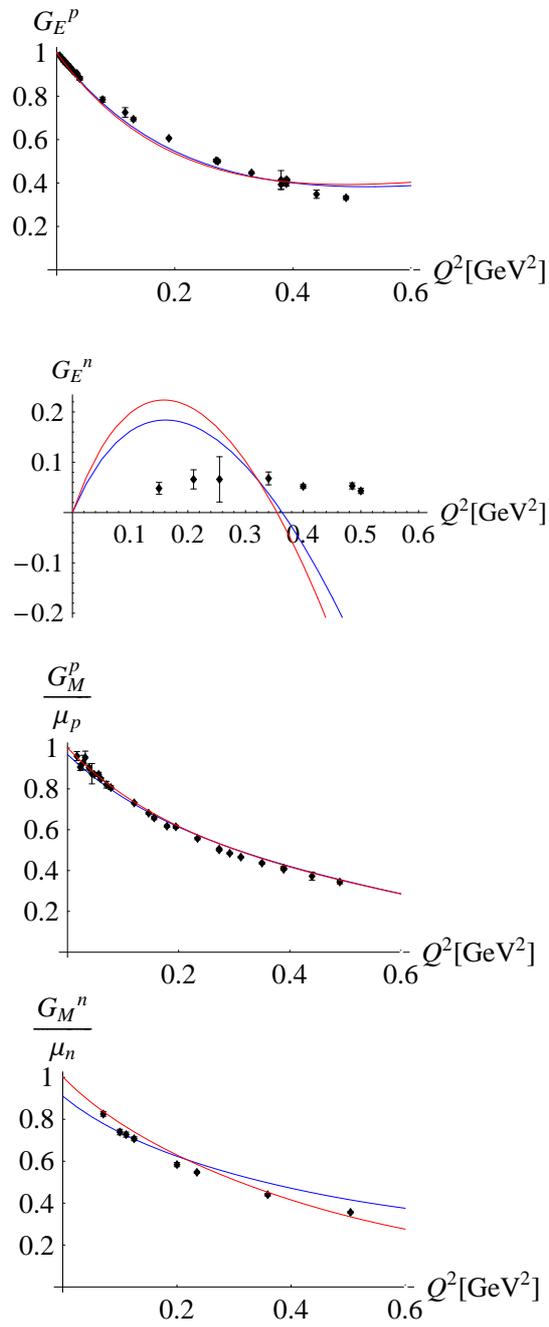


Abbildung 5.3: Sachs-Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  mit explizit berücksichtigten Vektormesonen. Die rote Linie ist das Ergebnis von Methode eins, die blaue Linie von Methode zwei. Die Messdaten stammen aus Referenz [61].

Die Rechnungen aus Referenz [19] und [23] liefern im betrachteten Impulsbereich von  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.4 \text{ GeV}^2$  ähnlich gute Resultate für die Sachs-Formfaktoren. Die Kurvenverläufe von  $G_E^p$  und  $G_M^p$  sind mit denen aus unserer Rechnung vergleichbar. Das Ergebnis für den magnetischen Formfaktor des Neutrons ist in dieser Arbeit etwas schlechter, da es nicht die gleiche Krümmung aufweist wie in den beiden anderen Rechnungen. Der größte Unterschied zwischen den drei Rechnungen ist in der Beschreibung von  $G_E^n$  zu erkennen. Beide Rechnungen liefern eine bessere Beschreibung des elektrischen Formfaktors des Neutrons als unsere Rechnung, in der die Kurve sogar negative Werte annimmt. Die Tatsache, dass sowohl der elektrische als auch der magnetische Formfaktor des Neutrons durch unsere Rechnung schlechter als durch diejenigen in den Referenzen [19] und [23] beschrieben werden, ist wahrscheinlich auf das Phi-Meson zurückzuführen. Dessen Hinzunahme in die Rechnung scheint nötig, um die Formfaktoren des Neutrons hinreichend gut beschreiben zu können. Außerdem werden durch die drei verschiedenen Arten die Vektormesonen in die Theorie einzubeziehen, in allen drei Rechnungen unterschiedliche Diagramme berücksichtigt. Der Vorteil unserer Rechnung besteht darin, dass durch die konsistente Berücksichtigung der Vektormesonen zumindest die Formfaktoren  $G_E^p$ ,  $G_E^n$  und  $G_M^p$  bis zum Impulsübertrag in der Größenordnung des Rho-Mesons gut beschrieben werden. Das Verhalten der Ergebnisse aus Referenz [19] und [23] für einen Impulsübertrag  $Q^2 > 0.4 \text{ GeV}^2$  wird in den jeweiligen Arbeiten nicht diskutiert. Es bleibt zu prüfen, ob durch die konsistente Hinzunahme des Phi-Mesons auch eine zufriedenstellende Beschreibung für  $G_E^n$  gelingt. Eine weitere Frage ist, inwiefern eine Rechnung bis zur vierten chiralen Ordnung die Beschreibung verbessern würde. Zusätzlich zu den Vektormesonen besteht die Möglichkeit, die Deltaresonanz als weiteren Freiheitsgrad zu berücksichtigen, um den Einfluss höherer Ordnungsterme zu untersuchen.

### 5.3.3 Fehlerabschätzung

Um eine Abschätzung des theoretischen Fehlers unserer Rechnung vorzunehmen, betrachten wir den Einfluss der Addition und Subtraktion einiger Terme höherer chiraler Ordnung auf unser Ergebnis. Dazu betrachten wir Diagramm (4) aus Abbildung 5.2, welches folgenden Beitrag zum Dirac-Formfaktor liefert:

$$F_1^{(4)} = \underbrace{\frac{\tau_3 M_\rho^2}{2(M_\rho^2 - q^2)}}_{F_{1_0}^{(4)}} - \underbrace{\frac{d_x g_0 q^2}{2(M_\rho^2 - q^2)}}_{F_{1_1}^{(4)}}. \quad (5.26)$$

Der Term  $F_{1_1}^{(4)}$  besitzt die chirale Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$ . Multipliziert man die Baumdiagramme inklusive  $F_{1_1}^{(4)}$  mit der WFRK (s. Gleichung (5.19)), die ihrerseits Terme der chiralen Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  besitzt, werden Beiträge mit höherer chiraler Ordnung als  $\mathcal{O}(q^3)$  generiert. Diese Beiträge blieben in den obigen Rechnungen unberücksichtigt. Die Graphen aus Abbildung (5.4) zeigen was geschieht, wenn man die vorher unberücksichtigten Beiträge zum Ergebnis addiert bzw. von diesem subtrahiert. Dabei stellt die rote Kurve die mit Methode 2 bestimmten Sachs-Formfaktoren dar. Die grau eingefärbte Fläche repräsentiert den abgeschätzten theoretischen Fehler.

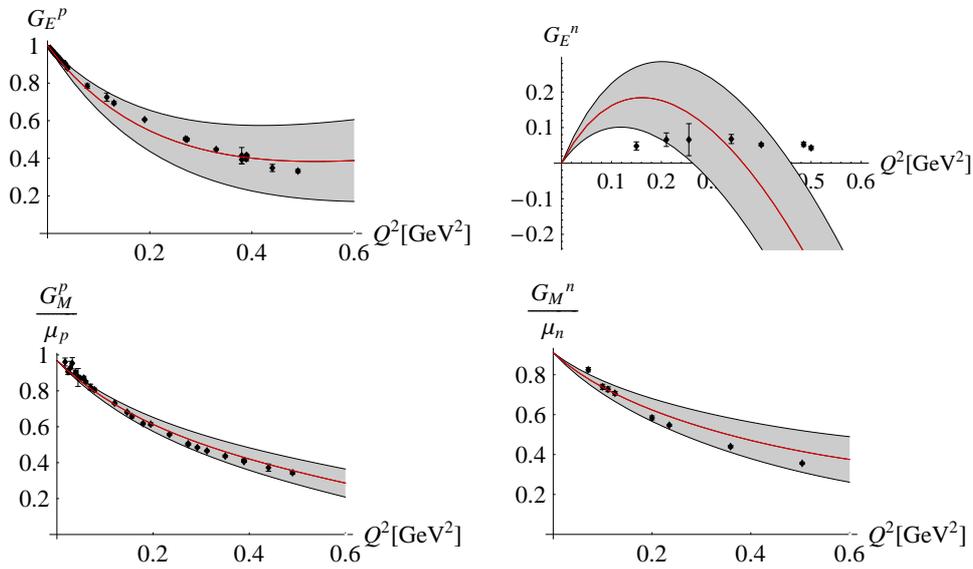


Abbildung 5.4: Fehlerabschätzung der Sachs-Formfaktoren bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  ohne Berücksichtigung der Deltaresonanz.

Erwartungsgemäß nimmt der Fehler für alle vier Formfaktoren zu größeren  $Q^2$  hin zu. Für den elektrischen Formfaktor des Protons ergibt sich mit unserer Abschätzung im Impulsbereich  $Q^2 < 0.2 \text{ GeV}^2$  ein prozentualer Fehler von unter 20 %. Dieser wächst im Bereich  $0.2 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 0.4 \text{ GeV}^2$  auf bis zu 40 % an, bis er schließlich für Impulsüberträge  $Q^2 > 0.4 \text{ GeV}^2$  ca. 50 % erreicht. Für die magnetischen Formfaktoren des Protons und Neutrons sind die prozentualen Fehler etwas geringer. Dort schätzen wir den Fehler im Impulsbereich  $Q^2 < 0.2 \text{ GeV}^2$  auf unter 10 %. Er steigt im Bereich  $0.2 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 0.4 \text{ GeV}^2$  auf bis zu 17 % an und erreicht für Impulsüberträge  $Q^2 > 0.4 \text{ GeV}^2$  30 %. Der elektrische Formfaktor des Neutrons besitzt wie erwartet den größten Fehler. Schon für Werte von  $Q^2 > 0.2 \text{ GeV}^2$  liegt

der abgeschätzte prozentuale Fehler bei über 100 %.

Die oben vorgestellte Methode der Addition und Subtraktion höherer Ordnungsterme, stellt nur eine grobe Abschätzung für den theoretischen Fehler dar. Es konnte jedoch bestätigt werden, dass der elektrische Formfaktor des Neutrons sehr stark von Termen der höheren Ordnung abhängt und somit eine hinreichend gute Beschreibung mit unserer Rechnung nicht möglich ist.

## 5.4 Formfaktoren mit der Deltaresonanz als explizitem Freiheitsgrad

Nachdem im vorigen Abschnitt die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons unter konsistenter Einbeziehung vektormesonischer Freiheitsgrade berechnet wurden, wird in diesem Abschnitt zusätzlich die Deltaresonanz als expliziter dynamischer Freiheitsgrad berücksichtigt. Als Grundlage dafür dient der in Kapitel 4.2 präsentierte Formalismus.

### 5.4.1 Bestimmung der Formfaktoren inklusive Deltaresonanz

Die Diagramme, die bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  zusätzlich zu denen aus Abbildung 5.2 berechnet werden müssen, sind in Abbildung 5.5 gezeigt. Die Vorgehensweise ist analog der im letzten Abschnitt. Nachdem man die einzelnen Beiträge der Formfaktoren addiert und die Gegenterme subtrahiert hat, multipliziert man das Ergebnis mit der Wellenfunktionsrenormierungskonstanten  $Z_N$  aus Gleichung (5.21)

$$Z_N = 1 - \left[ \Sigma'_{NN} + \Sigma'_{N\Delta} + \Sigma'_{N\rho} + \Sigma'_{N\omega} \right]. \quad (5.27)$$

Es wurde ebenfalls das EOMS-Schema zur Renormierung verwendet. Die expliziten, nicht renormierten Beiträge zum Dirac-Formfaktor  $F_1$  und zum Pauli-Formfaktor  $F_2$  sowie die Ausdrücke für die Abzugsterme finden sich in Anhang D.2.2.

Die Schwierigkeit bei der Berechnung der Diagramme aus Abbildung 5.5 besteht in der Komplexität des Delta-Propagators. Dadurch erlangen die Schleifenintegrale einen hohen Tensorrang. Einige wichtige Identitäten, die

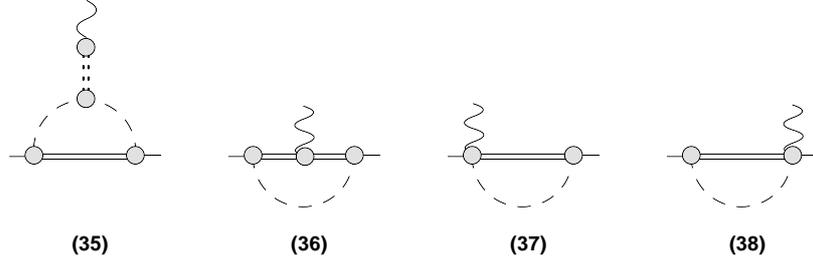


Abbildung 5.5: Feynmandiagramme mit Deltaresonanz, die zu den elektromagnetischen Formfaktoren bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  beitragen. Durchgezogene Linien stehen für Nukleonen, gestrichelte Linien für Pionen, geschlängelte Linien für Photonen, doppelt gestrichelte Linien für Rho-Mesonen und doppelt durchgezogene Linien für Deltaresonanzen.

bei der Reduktion dieses Tensorranges behilflich sind, lauten:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \Delta^{\mu\nu}(p) &= -\frac{1}{(n-1)m_\Delta} \gamma^\nu + \frac{n-2}{(n-1)m_\Delta^2} p^\nu \\ &= \Delta^{\nu\mu}(p) \gamma_\mu,\end{aligned}\quad (5.28)$$

$$p_\mu \Delta^{\mu\nu}(p) = \frac{(n-2)\not{p} + (n-1)m_\Delta}{(n-1)m_\Delta^2} p^\nu - \frac{\not{p}}{(n-1)m_\Delta} \gamma^\nu, \quad (5.29)$$

$$\Delta^{\nu\mu}(p) p_\mu = \frac{(n-2)\not{p} + (n-1)m_\Delta}{(n-1)m_\Delta^2} p^\nu - \gamma^\nu \frac{\not{p}}{(n-1)m_\Delta}. \quad (5.30)$$

Um eine graphische Darstellung der Formfaktoren zu erhalten, ist erneut die Kenntnis der Niederenergiekonstanten von Nöten. Durch die Einbeziehung der Deltaresonanz bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  erhält man zusätzlich zu den Kopplungskonstanten aus dem vorigen Abschnitt noch eine weitere Konstante  $g_\Delta$ . Den Wert hierfür erhalten wir aus Referenz [45],

$$g_\Delta = 1.127. \quad (5.31)$$

Da die Niederenergiekonstanten Informationen über die nicht in der Lagrangendichte berücksichtigten Freiheitsgrade enthalten, müssen sie aufgrund der Einbeziehung der Deltaresonanz erneut bestimmt werden. Analog dem vorherigen Abschnitt werden die Konstanten auf zwei verschiedene Arten bestimmt: Zum einen durch Anpassung von  $c_6$  und  $c_7$  an das magnetische Moment des Protons und Neutrons und anschließendem Fit der restlichen Kopplungskonstanten an die Messdaten, zum anderen durch Anpassen aller

Konstanten an die Messdaten. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

	$c_6$	$c_7$	$d_6$	$d_7$
Methode 1	2.56	1.14	2.69	-0.06
Methode 2	2.49	-0.07	2.19	-0.07
	$d_x$	$g_\omega$	$f_\omega$	$g_{2\omega\rho\rho}$
Methode 1	-1.06	-0.43	0.77	0.001
Methode 2	-0.89	-0.42	0.59	0.001

Tabelle 5.2: Werte der Kopplungskonstanten

#### 5.4.2 Ergebnisse der Formfaktoren inklusive Deltaresonanz

In Abbildung 5.6 sind die Sachs-Formfaktoren für einen Impulsübertrag im Bereich  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.6 \text{ GeV}^2$  zusammen mit den experimentellen Daten dargestellt. Wie bereits in Abbildung 5.3 ohne Deltaresonanz stimmen die Kurven mit den zwei verschiedenen Sätzen von Kopplungskonstanten gut miteinander überein. Für den elektrischen Formfaktor des Protons sind beide Kurven annähernd deckungsgleich und beschreiben die zugehörigen Daten sogar etwas besser als die aus den Rechnungen ohne Deltaresonanz erhaltenen Kurven. Ähnliches gilt auch für den magnetischen Formfaktor des Protons, wobei hier eine minimale Abweichung für sehr kleine Werte von  $Q^2$  zu erkennen ist. Beim magnetischen Formfaktor des Neutrons wird durch die zweite Methode eine etwas stärkere Krümmung generiert, welche zu einer geringfügig besseren Beschreibung der Daten führt. Insgesamt scheint beiden Kurven jedoch die ausreichende Krümmung zu fehlen, dies ist wahrscheinlich wieder auf die fehlende Berücksichtigung des Phi-Mesons zurückzuführen. Der elektrische Formfaktor des Neutrons nimmt negative Werte an und wird im gesamten Impulsbereich durch beide Kurven schlecht beschrieben. Die Ursache dafür dürfte in der Empfindlichkeit dieses Formfaktors für Terme höherer Ordnung liegen. Die Graphen für die Dirac- und Pauli-Formfaktoren im Impulsbereich  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.6 \text{ GeV}^2$  finden sich in Anhang D.3, Abbildung D.2 Hierbei wurden wieder die Kopplungskonstanten aus Tabelle 5.2 verwendet.

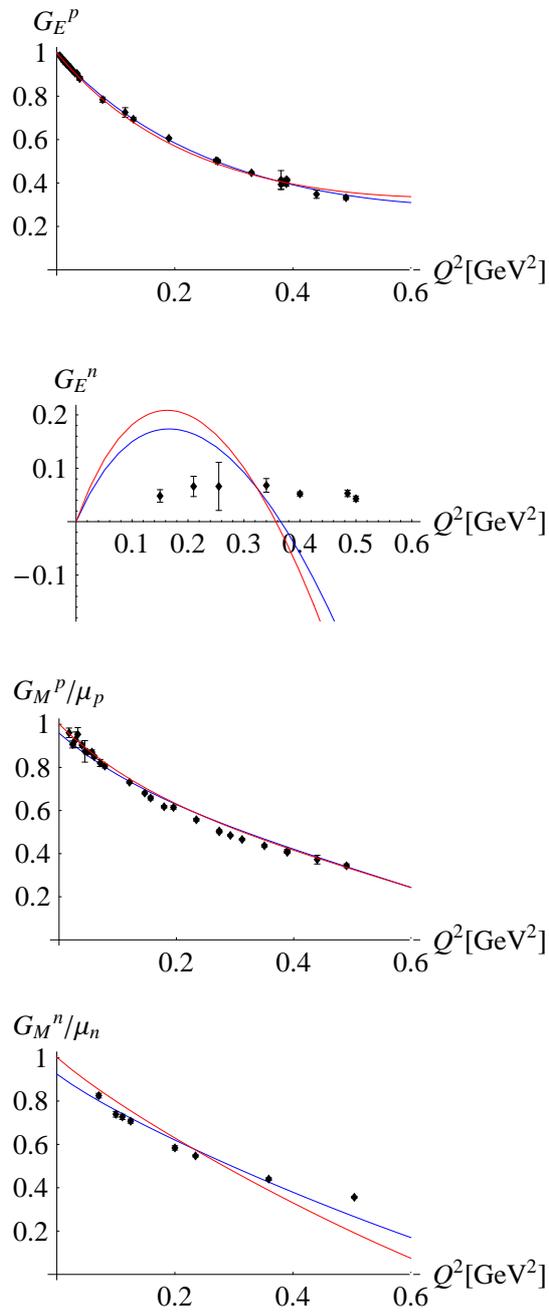


Abbildung 5.6: Sachs-Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  mit expliziter Berücksichtigung der Deltaresonanz. Die rote Linie ist das Ergebnis von Methode eins, die blaue Linie von Methode zwei.

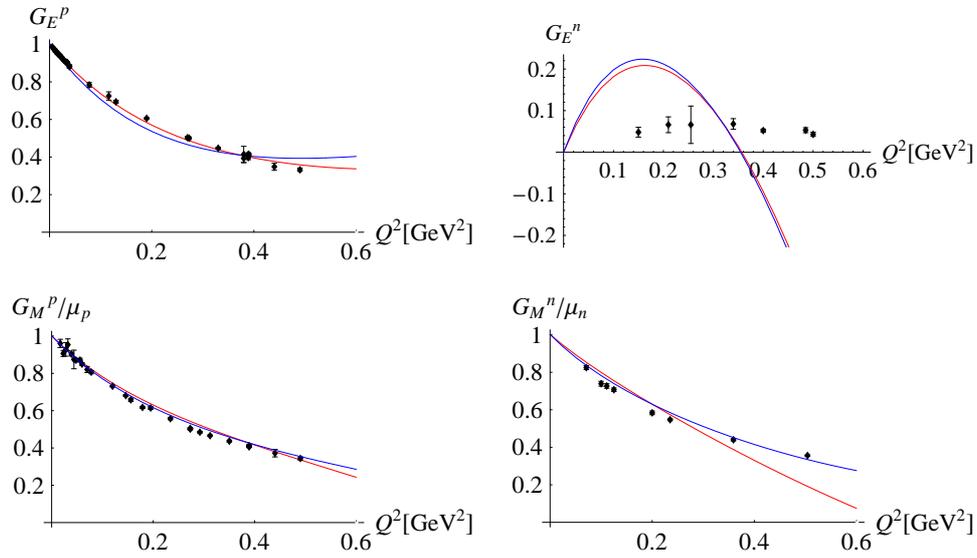


Abbildung 5.7: Sachs-Formfaktoren (Methode 1): Die rote Linie ist das Ergebnis unter Berücksichtigung der Deltaresonanz, die blaue ohne.

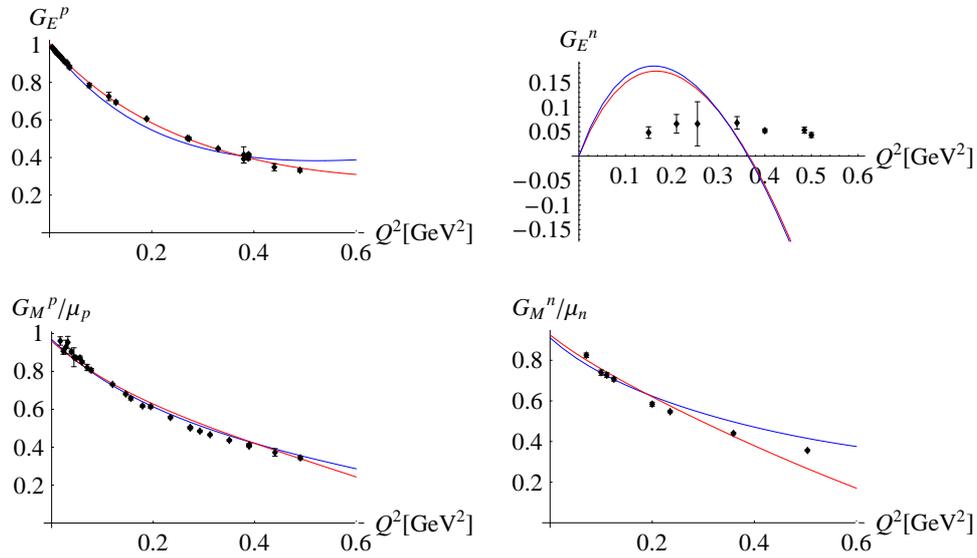


Abbildung 5.8: Sachs-Formfaktoren (Methode 2): Die rote Linie ist das Ergebnis unter Berücksichtigung der Deltaresonanz, die blaue ohne.

Als nächstes wird ein Vergleich zwischen den in diesem Abschnitt berechneten Sachs-Formfaktoren und solchen ohne Berücksichtigung der Deltaresonanz vorgenommen. Dazu sind in Abbildung (5.7) jeweils die Formfaktoren im Bereich  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.6 \text{ GeV}^2$  dargestellt, deren Kopplungskonstanten mit Hilfe von Methode eins bestimmt wurden, in Abbildung 5.8 diejenigen, deren Konstanten durch Methode zwei bestimmt wurden. In Abbildung 5.7 ist zu erkennen, dass für  $G_M^p$  und  $G_E^n$  die Hinzunahme der Deltaresonanz kaum Einfluss auf den Kurvenverlauf hat. Die Beschreibung von  $G_E^p$  wird durch die Hinzunahme der Deltaresonanz leicht verbessert. Beim magnetischen Formfaktor des Neutrons ist die fehlende Krümmung der Kurve bei Rechnung inklusive Deltaresonanz so stark, dass für  $Q^2 > 0.4 \text{ GeV}^2$  die Messdaten besser von der Rechnung ohne Vektormesonen beschrieben werden. Abbildung 5.8 bestätigt die oben diskutierten Resultate und liefert keine neuen Erkenntnisse. Die Erweiterung der Theorie um die Deltaresonanz liefert demnach keine verbesserte Beschreibung von  $G_E^n$ . Insgesamt hat die Deltaresonanz im betrachteten Impulsbereich mit ihrer Masse von 1232 MeV einen eher geringen Einfluss auf alle Formfaktoren. Die zusätzlichen Beiträge der Diagramme aus Abbildung 5.5 können demzufolge in den Niederenergiekonstanten der effektiven Lagrangedichte ohne explizite Berücksichtigung der Deltaresonanz absorbiert werden.

## 5.5 Ward-Takahashi-Identität

Chirale Ward-Identitäten sind, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, exakte Beziehungen zwischen verschiedenen Green'schen Funktionen. Dieser Abschnitt befasst sich mit der Ward-Takahashi-Identität der QED. Sie basiert auf der  $U(1)$ -Eichinvarianz der Lagrangedichte und stellt die folgende Relation zwischen dem elektromagnetischen Vertex des Nukleons und der Differenz zweier inverser Propagatoren dar [63]:

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma^\mu(p_i, p_f) &= \frac{(1 + \tau_3)}{2} (S_N^{-1}(p_f) - S_N^{-1}(p_i)) \\ &= \frac{(1 + \tau_3)}{2} (\Sigma(\not{p}_i) - \Sigma(\not{p}_f) + \not{q}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dabei steht  $iS_N(p)$  für den vollständigen Propagator des Nukleons aus Gleichung (5.12),  $-i\Sigma$  für alle einteilchenirreduziblen Diagramme und  $\not{q} = \not{p}_f - \not{p}_i$ .  $\Gamma^\mu$  ist als

$$\frac{i}{e} \times (\text{Summe aller Vertex-Diagramme}) \quad (5.33)$$

definiert.

Lässt man  $q_\mu$  gegen null streben, erhält man die von Ward ursprünglich hergeleitete Ward-Identität [33]:

$$\Gamma^\mu(p_i, p_i) = \frac{(1 + \tau_3)}{2} \frac{\partial S_N^{-1}(p_i)}{\partial p_i^\mu}. \quad (5.34)$$

Da Ward-Identitäten Ordnung für Ordnung erfüllt sein müssen, sind sie gut geeignet, um die Ergebnisse der Feynmangraphen aus den Abbildungen 5.2 und 5.5 zu überprüfen. Dies wollen wir anhand der Baumgraphen und der Schleifendiagramme mit expliziter Berücksichtigung der Deltaresonanz illustrieren. Dazu werden zunächst die Baumgraphen jeweils mit  $q_\mu$  multipliziert:

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma_{\text{tree}}^\mu &= q_\mu \frac{i}{e} \left\{ \left[ -i \frac{e}{2} \gamma^\mu \right] + \left[ e(c_6 \tau_3 + \frac{c_7}{2}) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] \right. \\ &\quad + \left[ i \frac{e}{2m} (q^2(p_i^\mu + p_f^\mu) - q^\mu q^\nu (p_i^\nu + p_f^\nu)) (d_6 \tau_3 + 2d_7) \right] \\ &\quad \left. + \left[ -i \tau_3 \frac{e}{2} \gamma^\mu \right] + \left[ -eg_\omega f_\omega \gamma^\nu (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \right] \right\} \\ &= \frac{i}{e} \left\{ \left[ -i \frac{e}{2} \not{q} \right] + \left[ e(c_6 \tau_3 + \frac{c_7}{2}) \underbrace{\sigma^{\mu\nu} q_\mu q_\nu}_{=0} \right] \right. \\ &\quad + \left[ i \frac{e}{2m} \underbrace{(q^2(q \cdot p_i + q \cdot p_f) - q^2(q \cdot p_i + q \cdot p_f))}_{=0} (d_6 \tau_3 + 2d_7) \right] \\ &\quad \left. + \left[ -i \tau_3 \frac{e}{2} \not{q} \right] + \left[ -eg_\omega f_\omega \gamma^\nu \underbrace{(q^2 q^\nu - q^2 q^\nu)}_{=0} \right] \right\} \\ &= \frac{i}{e} \left\{ \left[ -i \frac{e}{2} \not{q} \right] + \left[ -i \tau_3 \frac{e}{2} \not{q} \right] \right\} \\ &= \frac{(1 + \tau_3)}{2} \not{q}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht genau dem Baumanteil von Gleichung (5.33).

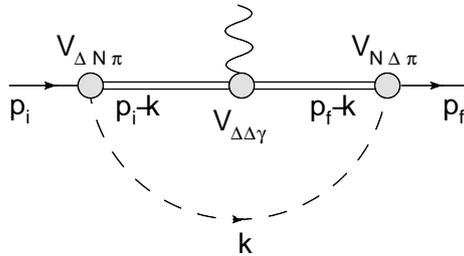


Abbildung 5.9: Diagramm (36)

Als nächstes betrachten wir Diagramm (36) (siehe Abbildung 5.9). Nach Multiplikation des Delta-Delta-Photon-Vertex  $V_{\Delta\Delta\gamma}^{\beta\mu\gamma}$  mit  $q_\mu$  ergibt sich

$$\begin{aligned} q_\mu V_{\Delta\Delta\gamma}^{\beta\mu\gamma} &= i e q_\mu [\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma - g^{\beta\mu} \gamma^\gamma + g^{\beta\gamma} \gamma^\mu - g^{\mu\gamma} \gamma^\beta] \\ &= i e [\gamma^\beta \not{q} \gamma^\gamma - q^\beta \gamma^\gamma + g^{\beta\gamma} \not{q} - q^\gamma \gamma^\beta]. \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Differenz der beiden inversen Delta-Propagatoren, die man aus Gleichung (4.34) mit  $A = -1$  ableiten kann, erkennt man:

$$q_\mu V_{\Delta\Delta\gamma}^{\beta\mu\gamma} = e[(\Delta^{\beta\gamma}(p_f - k))^{-1} - \Delta^{\beta\gamma}(p_i - k)]^{-1}.$$

Damit erhält man für das komplette Diagramm:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{3} \tau_3 + 1\right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\beta}(p_f - k) q_\mu V_{\Delta\Delta\gamma}^{\beta\mu\gamma} \Delta_{\gamma\delta}(p_i - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k)] \\ = & \left(\frac{5}{3} \tau_3 + 1\right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\beta}(p_f - k) e[(\Delta^{\beta\gamma}(p_f - k))^{-1} \\ & - \Delta^{\beta\gamma}(p_i - k)]^{-1} \Delta_{\gamma\delta}(p_i - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k)] \\ = & e \left(\frac{5}{3} \tau_3 + 1\right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) [g_\alpha^\gamma \Delta_{\gamma\delta}(p_i - k) \\ & - g_\delta^\beta \Delta_{\alpha\beta}(p_f - k)] V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k)] \\ = & e \left(\frac{5}{3} \tau_3 + 1\right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \{V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\delta}(p_i - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k) \\ & - V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\delta}(p_f - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k)\} \\ = & i e \left(\frac{5}{6} \tau_3 + \frac{1}{2}\right) [\Sigma_{N\Delta}(p_i) - \Sigma_{N\Delta}(p_f)]. \end{aligned} \tag{5.35}$$

$\Sigma_{N\Delta}(p)$  steht dabei für das Selbstenergiendiagramm (b) aus Abbildung 5.1. Auf ähnliche Weise kann man den in Abbildung 5.10 gezeigten Teil des Diagramms (35) umschreiben, nachdem man diesen mit  $q_\mu$  multipliziert hat:

$$\begin{aligned} q_\mu \tilde{V}^\mu(-k - q, k) &= e(-2q \cdot k - q^2) \\ &= i e [S(k)^{-1} - S(k + q)^{-1}]. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Unter Verwendung der Gleichung (5.37) lässt sich das Diagramm in die fol-

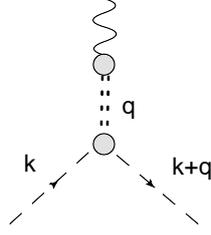


Abbildung 5.10:  $\tilde{V}^\mu(-k-q, k)$

gende Gestalt bringen:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{2}{3} e \tau_3 \right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \{ V_{N\Delta\pi}^\alpha(k+q) \Delta_{\alpha\delta}(p_i - k) \\
& \times V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k+q) - V_{N\Delta\pi}^\alpha(k+q) \Delta_{\alpha\delta}(p_i - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k) \} \\
= & \left( \frac{2}{3} e \tau_3 \right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \{ V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\delta}(p_f - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k+q) S(k) \\
& - V_{N\Delta\pi}^\alpha(k+q) \Delta_{\alpha\delta}(p_i - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k) \},
\end{aligned} \tag{5.37}$$

wobei im zweiten Schritt die Integrationsvariable  $k$  nach  $k - q$  verschoben wurde. Schließlich betrachten wir die Summe aus Diagramm (37) und (38). Multipliziert man diese mit  $q_\mu$ , kann sie folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{2}{3} e \tau_3 \right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \{ V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\delta}(p_f - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(q) S(k) \\
& - V_{N\Delta\pi}^\alpha(q) \Delta_{\alpha\delta}(p_i - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k) \}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Addiert man schließlich die Gleichungen (5.38) und (5.39), erhält man

$$\begin{aligned}
& e \left( \frac{2}{3} \tau_3 \right) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [ \{ V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\delta}(p_i - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k) \\
& - V_{N\Delta\pi}^\alpha(k) \Delta_{\alpha\delta}(p_f - k) V_{\Delta N\pi}^\delta(-k) S(k) \} \\
= & i e \left( \frac{2}{6} \tau_3 \right) [ \Sigma_{N\Delta}(p_i) - \Sigma_{N\Delta}(p_f) ].
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Dieses Zwischenergebnis liefert zusammen mit dem Resultat aus (5.35):

$$q_\mu \Gamma_\Delta^\mu(p_i, p_f) = \frac{(1 + \tau_3)}{2} (\Sigma_{N\Delta}(p_i) - \Sigma_{N\Delta}(p_f)). \tag{5.40}$$

Analog wurden auch die restlichen, zur Berechnung der Formfaktoren beitragenden Schleifendiagramme mit  $q_\mu$  multipliziert und umgeformt, so dass man insgesamt das folgende Resultat erhält:

$$\begin{aligned}
q_\mu \Gamma^\mu(p_i, p_f) &= \frac{(1 + \tau_3)}{2} (\not{q} + [\Sigma_N(p_i) - \Sigma_N(p_f)] \\
&\quad + [\Sigma_{N_\Delta}(p_i) - \Sigma_{N_\Delta}(p_f)] + [\Sigma_{N_\rho}(p_i) - \Sigma_{N_\rho}(p_f)] \\
&\quad + [\Sigma_{N_\omega}(p_i) - \Sigma_{N_\omega}(p_f)]) \\
&= \frac{(1 + \tau_3)}{2} (S_N^{-1}(p_f) - S_N^{-1}(p_i)).
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Diese Gleichung entspricht der Ward-Takahashi-Identität (5.33) und bestätigt die  $U(1)$ -Eichinvarianz unserer Ergebnisse. Dies ist ein Kriterium, das für die Konsistenz der Rechnungen unbedingt erfüllt sein muss.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons in manifest lorentzinvarianter chiraler Störungstheorie unter konsistenter Einbeziehung von Vektormesonen und der Deltaresonanz bis zur chiralen Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  berechnet. Dabei wurde mit der EOMS-Renormierung ein Renormierungsschema verwendet, mit dem neben Nukleonen auch Resonanzen in die effektive Lagrangedichte aufgenommen werden können, ohne eine Verletzung des chiralen Zählschemas zu erhalten [37].

Bei der Erweiterung der effektiven Lagrangedichte um vektormesonische Freiheitsgrade wurden die sich aus den Zwangsbedingungen ergebenden Konsequenzen für die Kopplungskonstanten [24] auf korrekte Weise berücksichtigt. Desweiteren wurde der Wert der Kopplungskonstanten für die Vektormesonselbstwechselwirkung und der Wechselwirkung zwischen Vektormesonen und Fermionen gleich gesetzt (Universalität der Rho-Mesonkopplung) und für die Vektorfelder die Weinberg'sche Parametrisierung verwendet, wodurch die Forderung nach störungstheoretischer Renormierbarkeit erfüllt werden kann [42]. Damit ist es uns gelungen Vektormesonen, die bekanntermaßen einen wichtigen Einfluss auf die Formfaktoren des Nukleons haben, nicht nur auf semi-phänomenologische, sondern auch auf konsistente Weise in eine effektive Feldtheorie einzubinden. In dieser Arbeit wurden die Formfaktoren unter Berücksichtigung der Rho-Mesonen und des Omega-Mesons als explizite Freiheitsgrade in chiraler Störungstheorie bis zur dritten Ordnung berechnet. Die in der Rechnung auftauchenden, unbekanntenen Niederenergiekonstanten wurden auf zwei unterschiedliche Arten bestimmt. Bei der ersten Methode wurden  $c_6$  und  $c_7$  durch die anomalen magnetischen Momente des Nukleons fixiert. Die restlichen Konstanten wurden an die experimentellen Daten für die Sachs-Formfaktoren angepasst. Bei der zweiten Methode wurden alle Niederenergiekonstanten dazu verwendet, die Rechnung an die Daten anzupassen. Die mit Hilfe beider Methoden gewonnenen Ergebnisse für die Sachs-

Formfaktoren wurden im Impulsbereich  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.6 \text{ GeV}^2$  miteinander verglichen und stimmen gut überein. Der Vergleich unserer Ergebnisse mit den experimentellen Daten für die Sachs-Formfaktoren zeigt, dass sowohl der Verlauf des elektrischen als auch der des magnetischen Sachs-Formfaktors des Protons sehr gut beschrieben wird. Für den magnetischen Formfaktor des Neutrons kann ebenfalls eine hinreichend gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten beobachtet werden. Lediglich der elektrische Formfaktor des Neutrons zeigt eine schlechte Übereinstimmung mit den Daten, dies lässt sich auf die starke Abhängigkeit dieses Formfaktors von Beiträgen höherer Ordnung zurückführen. Aus dem Vergleich mit zwei weiteren relativistischen Formfaktorrechnungen in chiraler Störungstheorie, [19] und [23], lässt sich darauf schließen, dass die Hinzunahme des Phi-Mesons die Beschreibung des elektrischen und magnetischen Neutron-Formfaktors verbessert.

Die Deltaresonanz stellt den ersten angeregten Zustand des Nukleons dar. Ihre Nähe zum Grundzustand liefert ein plausibles Argument dafür, sie als expliziten Freiheitsgrad in die chirale Störungstheorie aufzunehmen [45]. In dieser Arbeit wurden die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons unter Berücksichtigung der Deltaresonanz bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  berechnet. Dazu wurde die effektive Lagrangedichte inklusive Vektormesonen um die Freiheitsgrade der Deltaresonanz ergänzt. Neben den beiden von der herkömmlichen chiralen Entwicklung bekannten kleinen Parametern  $q$  und  $m_q$ , tritt mit der Massendifferenz  $\delta = m_\Delta - m_N$  ein zusätzlicher kleiner Parameter in Erscheinung. Die Anzahl der unbekanntenen Niederenergiekonstanten ändert sich durch Einbau der Deltaresonanz nicht, so dass zur Bestimmung dieser wieder die zwei oben beschriebenen Methoden verwendet wurden. Trägt man die Ergebnisse für die Sachs-Formfaktoren im Impulsbereich  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.6 \text{ GeV}^2$  auf und vergleicht die durch beide Methoden erhaltenen Kurven, erkennt man, dass die Ergebnisse ähnlich dem Fall ohne Berücksichtigung der Deltaresonanz gut miteinander übereinstimmen. Auch der Vergleich zwischen den Ergebnissen für die Sachs-Formfaktoren mit und ohne Deltaresonanz liefert eine gute Übereinstimmung. Die Diagramme aus Abbildung 5.5, die durch Einbau der Deltaresonanz noch berücksichtigt werden müssen, beeinflussen den Verlauf der Formfaktoren nur sehr gering. Sie tragen vor allem nicht dazu bei, die Beschreibung des magnetischen und besonders des elektrischen Formfaktors des Neutrons zu verbessern. Anders als bei der Hinzunahme der Vektormesonen liefert der Einbau der Deltaresonanz lediglich Beiträge, die durch die Niederenergiekonstanten einer effektiven Lagrangedichte ohne explizite Berücksichtigung der Deltaresonanz absorbiert werden können.

Insgesamt gelang es, drei der vier elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons durch eine effektive Feldtheorie mit konsistenter Berücksichtigung

von Vektormesonen und der Deltaresonanz schon durch eine Rechnung bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$  hinreichend gut zu beschreiben. Durch die Wahl des EOMS-Renormierungsschemas ist es möglich, ein systematisches Zählschema aufzustellen, so dass Beiträge von Schleifendiagrammen unterdrückt sind, währenddessen Baumdiagramme mit Vektormesonen die erwarteten wichtigen Beiträge zu den Nukleon-Formfaktoren liefern.

Eine Rechnung bis zur vierten chiralen Ordnung unter semi-phänomenologischer Berücksichtigung des Phi-Mesons beschreibt die Neutron-Formfaktoren im Impulsbereich  $0 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 0.4 \text{ GeV}^2$  gut [23] und liefert somit ein Motiv, die in dieser Arbeit vollzogene Rechnung nicht ohne, sondern mit Berücksichtigung des Phi-Mesons durchzuführen. Dabei könnte geprüft werden, ob die gute Beschreibung der Proton-Formfaktoren bis zu einem Impulsübertrag in der Größenordnung der Rho-Mesonenmasse sich für die Neutron-Formfaktoren fortsetzt. Neben dem Einbau von Resonanzen in die effektive Lagrangedichte bietet das in dieser Arbeit verwendete Renormierungsschema auch die Möglichkeit einer Zweischleifenrechnung, welche eine genauere Untersuchung der Formfaktoren in lorentzinvarianter chiraler Störungstheorie erlaubt.

# Anhang A

## Definitionen

### A.1 Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind die Generatoren der Gruppe  $SU(2)$ . Eine Darstellung lautet:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Sie erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\left[ \frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}, \quad (\text{A.2})$$

wobei  $\epsilon_{ijk}$  das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen ist. Außerdem besitzen die Pauli-Matrizen noch die folgenden wichtigen Eigenschaften:

$$\tau_i^\dagger = \tau_i, \quad \text{Tr } \tau_i = 0, \quad \det \tau_i = -1, \quad \tau_i \tau_j = i\epsilon_{ijk} \tau_k + \delta_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

## A.2 Gell-Mann-Matrizen

Die Gell-Mann-Matrizen  $\lambda_a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) sind die Generatoren der Gruppe  $SU(3)$ , die die Eichgruppe der QCD darstellt. Eine Darstellung der  $(3, 3)$ -Matrizen lautet:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ähnlich den Pauli-Matrizen  $\tau_i$  handelt es sich bei den Gell-Mann-Matrizen  $\lambda_a$  um spurlose und hermitesche Matrizen die folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Die  $f_{abc}$  sind die Strukturkonstanten der  $SU(3)$  und sind antisymmetrisch unter Vertauschung zweier beliebiger Indizes. Alle nichtverschwindenden Strukturkonstanten sind in Tabelle A.1 angegeben.

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{abc}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Tabelle A.1: Strukturkonstanten  $f_{abc}$

### A.3 Dirac-Matrizen

Die Dirac-Matrizen erfüllen die Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

wobei  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  der metrische Tensor in vier Dimensionen ist.

Zusammen mit der Matrix  $\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  bilden die Dirac-Matrizen mit dem Produkt aus (A.6) eine Algebra, die zu den Klassen der Clifford-Algebren gehört.

Weitere Eigenschaften der Dirac-Matrizen sind:

$$(\gamma^0)^2 = I, \quad (\gamma^i)^2 = -I, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (\text{A.7})$$

und

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = I, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \quad (\text{A.8})$$

Man definiert außerdem noch die Größe

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (\text{A.9})$$

Für die Kontraktion einer Dirac-Matrix  $\gamma_\mu$  und eines Vierervektors  $a^\mu$  führt man üblicherweise, die auf Feynman zurückgehende, verkürzte Slash-Notation ein:

$$\gamma_\mu a^\mu =: \not{a}. \quad (\text{A.10})$$

Es gelten die Identitäten:

$$\not{a}\not{a} = a_\mu a^\mu = a^2, \quad (\text{A.11})$$

$$\not{a}\not{b} = 2a_\mu b^\mu - \not{b}\not{a}. \quad (\text{A.12})$$

Schließlich folgen einige Relationen der Dirac-Matrizen in  $n$  Dimensionen, die man für die Methode der dimensional Regularisierung benötigt:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_N, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = n I_N, \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu = (2 - n) \gamma^\alpha, \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta} - (n - 4) \gamma^\alpha \gamma^\beta, \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\mu = -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha + (4 - n) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta. \quad (\text{A.17})$$

## A.4 Hypergeometrische Funktionen

Die Gauß'sche hypergeometrische Funktion ist durch folgende Potenzreihe definiert:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n (a)_n (b)_n}{n! (c)_n} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{n! \Gamma(c+n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Dabei steht  $(a)_n$  für die Pochhammer-Funktion,

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1, \quad (\text{A.19})$$

und  $\Gamma(z)$  für die Gammafunktion, die durch Eulers Integral definiert ist,

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.20})$$

Die hypergeometrische Funktion konvergiert für  $|z| < 1$  und ist eine partikuläre Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$z(1-z) \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dF(z)}{dz} - abF(z) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ist durch den folgenden Ausdruck gegeben

$${}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i (a_1)_i \cdots (a_n)_i}{i! (b_1)_i \cdots (b_m)_i}. \quad (\text{A.22})$$

# Anhang B

## Isospin

Das Proton und das Neutron bilden ein  $SU(2)$ -Isospin-Dublett

$$|\text{Proton}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\text{Neutron}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Mit den in Anhang A.1 definierten Pauli-Matrizen gelten folgende Relationen:

$$\tau_3|p\rangle = |p\rangle, \quad \tau_3|n\rangle = -|n\rangle, \quad (\text{B.2})$$

$$\tau_+|n\rangle = |p\rangle, \quad \tau_-|n\rangle = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\tau_-|p\rangle = |n\rangle, \quad \tau_+|p\rangle = 0, \quad (\text{B.4})$$

wobei  $\tau_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$  die Auf- bzw. Absteigeoperatoren sind. Die elektrische Ladung des Nukleons ergibt sich aus der Formel

$$Q = \frac{1}{2}(B + \tau_3) \quad (\text{B.5})$$

mit der Baryonenzahl  $B = 1$ .

# Anhang C

## Feynmanregeln

Im Folgenden findet sich eine Zusammenstellung der Feynmanregeln für die Propagatoren und die zu der Berechnung der Formfaktoren beitragenden Vertizes. Dabei stehen einfach durchgezogene Linien für Nukleonen, einfach geschlängelte für Photonen, einfach gestrichelte für Pionen, doppelt durchgezogene für Deltaresonanzen, doppelt gestrichelte für Rho-Mesonen und doppelt geschlängelte für Omega-Mesonen. Die Vertizes wurden aus den in Kapitel 4 und 5 vorgestellten Lagrangedichten hergeleitet. Dabei werden alle Teilchen als einlaufende Teilchen betrachtet. Bei den Vertizes aus Kapitel 5 wurde der Parameter  $z = -1$  gesetzt.

### C.1 Propagatoren

$$\text{Nukleon: } iS_N(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i0^+}$$

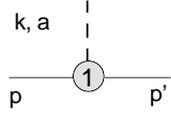
$$\text{Delta: } i\Delta^{\mu\nu}(p)$$

$$= \left( \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{n-1} - g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu \gamma^\nu - p^\nu \gamma^\mu}{(n-1)m_\Delta} + \frac{(n-2)p^\mu p^\nu}{(n-1)m_\Delta^2} \right) \frac{i}{\not{p} - m_\Delta + i0^+}$$

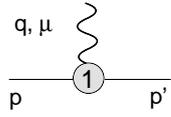
$$\text{Pion: } iS_\pi(k) = \frac{i}{k^2 - M^2 + i0^+}$$

$$\text{Vektormeson: } iS_V^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu} + i\frac{k^\mu k^\nu}{M_V^2}}{k^2 - M_V^2 + i0^+}$$

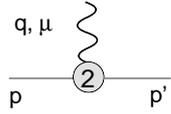
## C.2 Vertizes



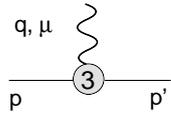
$$-\frac{g_A}{2F} \not{k} \gamma_5 \tau_a$$



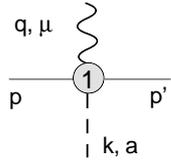
$$-i \frac{e}{2} \gamma^\mu$$



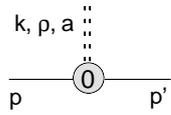
$$e \left( c_6 \tau_3 + \frac{c_7}{2} \right) \sigma^{\mu\nu} q_\nu$$



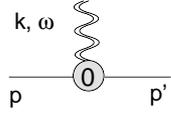
$$\frac{ie}{2m} [q^2 (p^\mu + p'^\mu) - q^\mu q^\nu (p_\nu + p'_\nu)] \times [d_6 \tau_3 + 2d_7]$$



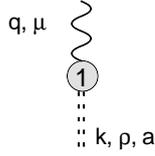
$$-ie \frac{g_A}{2F} \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_{a3i} \tau_i$$



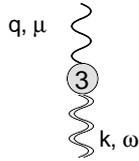
$$\tau_a \frac{i}{2} g_0 \gamma^\mu$$



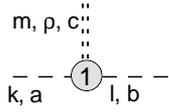
$$\frac{i}{2}g_\omega\gamma^\mu$$



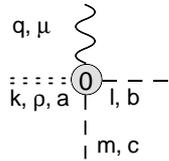
$$\delta_{a3}ie\left[(2F^2g_0 + \frac{c_x M^2}{g_0})g^{\mu\nu} + d_x(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2)\right]$$



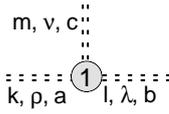
$$2ief_\omega(q^2g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$$



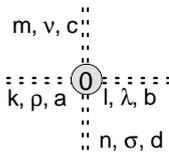
$$-\epsilon_{abc}(k^\rho - l^\rho)g_0$$



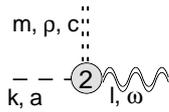
$$ig_0eg^{\mu\rho}(-2\delta_{3a}\delta_{bc} + \delta_{3b}\delta_{ac} + \delta_{3c}\delta_{ab})$$



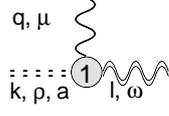
$$\epsilon_{abc}g_0(l^\rho g^{\lambda\nu} - m^\rho g^{\lambda\nu} + k^\nu g^{\lambda\rho} - l^\nu g^{\lambda\rho} - k^\lambda g^{\rho\nu} + m^\lambda g^{\rho\nu})$$



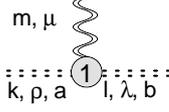
$$ig_0^2(g^{\lambda\rho}g^{\sigma\nu}(\delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd} - 2\delta_{ab}\delta_{cd}) + g^{\lambda\sigma}g^{\rho\nu}(\delta_{ad}\delta_{bc} - 2\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ab}\delta_{cd}) + g^{\lambda\nu}g^{\sigma\rho}(-2\delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ab}\delta_{cd}))$$



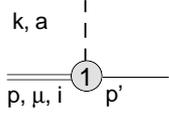
$$i\delta_{ac}g_{\omega\rho\pi}\epsilon^{\rho\omega\alpha\beta}m_\alpha l_\beta$$



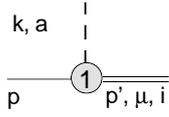
$$\frac{e}{g_0} \delta_{b3} [g_{1\omega\rho\rho} (k^\omega g^{\mu\rho} + q^\omega g^{\mu\rho}) + g_{2\omega\rho\rho} (k^\rho g^{\mu\omega} + q^\mu g^{\omega\rho})]$$



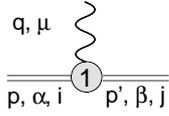
$$\delta_{ab} [g_{1\omega\rho\rho} (k^\mu + l^\mu) g^{\rho\lambda} + g_{2\omega\rho\rho} (k^\rho g^{\mu\lambda} + l^\lambda g^{\mu\rho})]$$



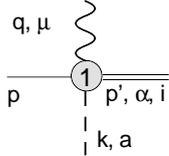
$$\frac{(2\delta_{ai} - i\epsilon_{aik}\tau_k)(g_\Delta(\not{k}\gamma^\mu - k^\mu))}{3F}$$



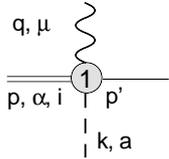
$$\frac{(2\delta_{ai} + i\epsilon_{aik}\tau_k)(g_\Delta(\gamma^\mu \not{k} - k^\mu))}{3F}$$



$$\frac{ie}{6} (\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\mu g^{\alpha\beta} - \gamma^\alpha g^{\mu\beta} - \gamma^\beta g^{\alpha\mu}) \\ (5i\epsilon_{3ij} + 2\delta_{ij}(1 + 2\tau_3) - \delta_{3j}\tau_i - \delta_{3i}\tau_j + i\epsilon_{ijk}\tau_k)$$



$$\frac{g_\Delta e (\gamma^\alpha \gamma^\mu - g^{\alpha\mu}) (-2i\epsilon_{3ai} - \delta_{ai}\tau_3 + \delta_{3i}\tau_a)}{3F}$$



$$\frac{g_\Delta e (\gamma^\mu \gamma^\alpha - g^{\alpha\mu}) (-2i\epsilon_{3ai} + \delta_{ai}\tau_3 - \delta_{3i}\tau_a)}{3F}$$

# Anhang D

## Beiträge zu den Formfaktoren und der WFRK

Zunächst werden die bei der Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren auftretenden Integrale definiert. Da in dieser Arbeit alle Diagramme auf skalare Integrale reduziert wurden [64], sind nur solche hier aufgelistet. Die divergenten Anteile der Integrale wurden mit Hilfe der dimensional Regularisierung bestimmt.

### D.1 Definitionen der Integrale

Integral mit einer inneren Linie

$$A_0(m^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-n}}{i\pi^2} \int \frac{d^n k}{k^2 - m^2 + i0^+}.$$

Integral mit zwei inneren Linien

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-n}}{i\pi^2} \int \frac{d^n k}{[k^2 - m_1^2 + i0^+][(k+p)^2 - m_2^2 + i0^+]}$$

Integral mit drei inneren Linien

$$C_0(p_i^2, (p_f - p_i)^2, p_f^2, M^2, m_1, m_2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-n}}{i\pi^2} \int \frac{d^n k}{[k^2 - M^2 + i0^+][(k - p_i)^2 - m_1^2 + i0^+][(k - p_f)^2 - m_2^2 + i0^+]}$$

Mit den Definitionen

$$\lambda = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{n-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \right\}$$

und

$$\Omega = \frac{p^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1m_2}$$

lauten die expliziten Ausdrücke für die skalaren Integrale:

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= (-16\pi^2) \left[ 2m^2\lambda + \frac{m^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) \right], \\ B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) &= (-16\pi^2) \left( 2\lambda + \frac{\ln\left(\frac{m_1}{\mu}\right)}{8\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left[ -1 + \frac{p^2 - m_1^2 + m_2^2}{p^2} \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + \frac{2m_1m_2}{p^2} F(\Omega) \right] \right), \end{aligned}$$

wobei

$$F(\Omega) = \begin{cases} \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(-\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}) & \text{für } \Omega \leq -1 \\ \sqrt{1 - \Omega^2} \arccos(-\Omega) & \text{für } -1 \leq \Omega \leq 1 \\ \sqrt{\Omega^2 - 1} \ln(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}) - i\pi\sqrt{\Omega^2 - 1} & \text{für } 1 \leq \Omega. \end{cases}$$

Schließlich folgen noch einige hilfreiche Beziehungen zwischen den skalaren Integralen:

$$\begin{aligned} B_0(0, m_1^2, m_2^2) &= \frac{A_0(m_1^2) - A_0(m_2^2)}{m_1^2 - m_2^2}, \\ B_0(0, m_1^2, m_1^2) &= \frac{A_0(m_1^2)}{m_1^2} - 1, \\ C_0(m_1^2, 0, m_1^2, M^2, m_1, m_1) &= \frac{\partial}{\partial m_1^2} B_0(m_1^2, M^2, m_1^2), \\ C_0(0, m_1^2, m_1^2, M^2, M^2, m_1) &= \frac{\partial}{\partial M^2} B_0(m_1^2, M^2, m_1^2). \end{aligned}$$

## D.2 Formfaktoren

### D.2.1 Diagramme ohne Deltaresonanz

Die nichtrenormierten Beiträge zum Dirac-Formfaktor  $F_1$  lauten:

$$F_1^{1+3+4+5} = \frac{1}{2} + \frac{\tau_3 (M_\rho^2 - d_x g_0 q^2)}{2M_\rho^2 - 2q^2} - q^2(2d_7 + d_6 \tau_3) + \frac{f_\omega g_\omega q^2}{M_\omega^2 - q^2},$$

$$\begin{aligned} F_1^6 = & \frac{3\mathfrak{g}_A^2}{128F_\pi^2\pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (8m_N^2q^2 - 2q^4) A_0(m_N^2) \right. \\ & + (q^4 - 16m_N^4) A_0(M_\pi^2) + 2((-q^4 + 4m_N^2q^2 \\ & + (q^4 - 2M_\pi^2q^2 - 4m_N^2(4M_\pi^2 + q^2)) B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) \\ & - 2M_\pi^2(-16m_N^4 + 4(2M_\pi^2 + q^2)m_N^2 + M_\pi^2q^2) \\ & \times C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2)) m_N^2 \\ & \left. + M_\pi^2(16m_N^4 + 6q^2m_N^2 - q^4) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1^7 = & \frac{-\tau_3 M_\rho^2 \mathfrak{g}_A^2}{128F_\pi^2\pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (8m_N^2q^2 - 2q^4) \right. \\ & \times A_0(m_N^2) + (q^4 - 16m_N^4) A_0(M_\pi^2) - 2((q^4 - 4m_N^2q^2 \\ & - (q^4 - 2M_\pi^2q^2 - 4m_N^2(4M_\pi^2 + q^2)) B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) \\ & - 2M_\pi^2(-16m_N^4 + 4(2M_\pi^2 + q^2)m_N^2 + M_\pi^2q^2) \\ & \times C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2)) m_N^2 \\ & \left. + M_\pi^2(16m_N^4 + 6q^2m_N^2 - q^4) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) \right), \end{aligned}$$

$$F_1^{8+9} = -\frac{\mathfrak{g}_A^2 \tau_3 (B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) M_\pi^2 + A_0(m_N^2))}{16F_\pi^2\pi^2},$$

$$\begin{aligned}
F_1^{10} = & \frac{g_A^2 M_\rho^2 \tau_3}{576 F_\pi^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} (2(4m_N^2 - q^2)^2 \\
& \times (q^4 - 6M_\pi^2 q^2 + m_N^2 (24M_\pi^2 - 22q^2)) \\
& + 144 (4m_N^4 - m_N^2 q^2) A_0 (m_N^2) + 6 (-80m_N^4 + 16q^2 m_N^2 + q^4) \\
& \times A_0 (M_\pi^2) + 3 (24 (q^2 M_\pi^4 + m_N^2 (8M_\pi^4 - 12q^2 M_\pi^2 + 3q^4)) \\
& \times C_0 (q^2, m_N^2, m_N^2, M_\pi^2, M_\pi^2, m_N^2) m_N^2 + 24 (16m_N^4 M_\pi^2 \\
& - m_N^2 (6m_N^2 + M_\pi^2) q^2) B_0 (m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) \\
& - (q^6 - 4 (5m_N^2 + M_\pi^2) q^4 - 8m_N^2 (10m_N^2 - 7M_\pi^2) q^2 \\
& + 128m_N^4 M_\pi^2) B_0 (q^2, M_\pi^2, M_\pi^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{11} = & -\frac{3g_0^2}{128M_\rho^2\pi^2(q^2-4m_N^2)^2} (4(q^2-4m_N^2)A_0(m_N^2)M_\rho^2 \\
& + ((2q^2(12m_N^2+M_\rho^2-2q^2)-32m_N^2(m_N^2+M_\rho^2))B_0(m_N^2,m_N^2,M_\rho^2) \\
& + (32m_N^4+4(4M_\rho^2-5q^2)m_N^2+3q^4+2M_\rho^2q^2)B_0(q^2,m_N^2,m_N^2) \\
& + 2(8m_N^4-6q^2m_N^2+q^4+(8(M_\rho^4-4m_N^4)m_N^2 \\
& +q^2(32m_N^4-2(4M_\rho^2+5q^2)m_N^2+(M_\rho^2+q^2)^2))) \\
& \times C_0(m_N^2,q^2,m_N^2,M_\rho^2,m_N^2,m_N^2))M_\rho^2 \\
& + (4m_N^2-q^2)(4(m_N^2+M_\rho^2)-q^2)A_0(M_\rho^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{12} = & \frac{g_0^2 \tau_3}{128M_\rho^2\pi^2(q^2-4m_N^2)^2(q^2-M_\rho^2)} (4(q^2-4m_N^2)A_0(m_N^2)M_\rho^2 \\
& + ((2q^2(12m_N^2+M_\rho^2-2q^2)-32m_N^2(m_N^2+M_\rho^2))B_0(m_N^2,m_N^2,M_\rho^2) \\
& + (32m_N^4+4(4M_\rho^2-5q^2)m_N^2+3q^4+2M_\rho^2q^2)B_0(q^2,m_N^2,m_N^2) \\
& + 2(8m_N^4-6q^2m_N^2+q^4+(8(M_\rho^4-4m_N^4)m_N^2 \\
& +q^2(32m_N^4-2(4M_\rho^2+5q^2)m_N^2+(M_\rho^2+q^2)^2))) \\
& \times C_0(m_N^2,q^2,m_N^2,M_\rho^2,m_N^2,m_N^2))M_\rho^2 \\
& + (4m_N^2-q^2)(4(m_N^2+M_\rho^2)-q^2)A_0(M_\rho^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{13} = & \frac{g_0^2 \tau_3 (-2(4m_N^2 - q^2))}{1152M_\rho^2\pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} (q^6 - 4(m_N^2 + 2M_\rho^2) q^4 \\
& + 4(3M_\rho^4 + 8m_N^2 M_\rho^2) q^2 + 24m_N^2 M_\rho^4 + 144M_\rho^4 (4m_N^2 - q^2) A_0(m_N^2) \\
& - 6(4m_N^2 - q^2) (24M_\rho^4 - 10q^2 M_\rho^2 - q^4 + 4m_N^2 (10M_\rho^2 + q^2)) A_0(M_\rho^2) \\
& + 72M_\rho^4 (2q^4 - (18m_N^2 + M_\rho^2) q^2 + 16m_N^2 (m_N^2 + M_\rho^2)) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) \\
& + 3(q^8 + 18M_\rho^2 q^6 - 28M_\rho^4 q^4 - 24M_\rho^6 q^2 + 16m_N^4 (-16M_\rho^4 + 18q^2 M_\rho^2 + q^4) \\
& - 8m_N^2 (24M_\rho^6 - 40q^2 M_\rho^4 + 18q^4 M_\rho^2 + q^6)) B_0(q^2, M_\rho^2, M_\rho^2) \\
& + 72M_\rho^4 (8(2M_\rho^2 + q^2) m_N^4 + (8M_\rho^4 - 24q^2 M_\rho^2 + q^4) m_N^2 \\
& + M_\rho^2 q^2 (M_\rho^2 + 2q^2)) C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\rho^2, M_\rho^2, m_N^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{14} = & \frac{g_0^2 \tau_3}{1152M_\rho^2\pi^2 (M_\rho^2 - q^2)^2} (-9M_\rho^6 - 6(3M_\rho^4 + 8q^2 M_\rho^2 + q^4) A_0(M_\rho^2) \\
& - (4M_\rho^2 - q^2) (3(12M_\rho^4 + 20q^2 M_\rho^2 + q^4) B_0(q^2, M_\rho^2, M_\rho^2)) \\
& + 2(q^2 - 6M_\rho^2) q^2),
\end{aligned}$$

$$F_1^{15} = \frac{g_0^2 M_\rho^2 \tau_3 (2(q^2 - 6M_\pi^2) - 6A_0(M_\pi^2) + 3(q^2 - 4M_\pi^2) B_0(q^2, M_\pi^2, M_\pi^2))}{288\pi^2 (M_\rho^2 - q^2)^2},$$

$$F_1^{16} = -\frac{3g_0^2 M_\rho^2 \tau_3 (5M_\rho^2 - 6A_0(M_\rho^2))}{128\pi^2 (M_\rho^2 - q^2)^2},$$

$$F_1^{17} = \frac{g_0^2 \tau_3 A_0(M_\pi^2)}{16\pi^2 (M_\rho^2 - q^2)},$$

$$\begin{aligned}
F_1^{18} = & -\frac{g_\omega^2}{128M_\omega^2\pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2} (4(q^2 - 4m_N^2) A_0(m_N^2) M_\omega^2 \\
& + ((2q^2 (12m_N^2 + M_\omega^2 - 2q^2) - 32m_N^2 (m_N^2 + M_\omega^2)) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) \\
& + (32m_N^4 + 4(4M_\omega^2 - 5q^2) m_N^2 + 3q^4 + 2M_\omega^2 q^2) B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) \\
& + 2(8m_N^4 - 6q^2 m_N^2 + q^4 + (8(M_\omega^4 - 4m_N^4) m_N^2 \\
& + q^2 (32m_N^4 - 2(4M_\omega^2 + 5q^2) m_N^2 + (M_\omega^2 + q^2)^2))) \\
& \times C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\omega^2, m_N^2, m_N^2)) M_\omega^2 \\
& + (4m_N^2 - q^2) (4(m_N^2 + M_\omega^2) - q^2) A_0(M_\omega^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{19} = & \frac{f_\omega g_\omega^3}{64M_\omega^2\pi^2 (M_\omega^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( 4 (q^2 - 4m_N^2) A_0 (m_N^2) M_\omega^2 \right. \\
& + \left( (2q^2 (12m_N^2 + M_\omega^2 - 2q^2) - 32m_N^2 (m_N^2 + M_\omega^2)) B_0 (m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) \right. \\
& + (32m_N^4 + 4 (4M_\omega^2 - 5q^2) m_N^2 + 3q^4 + 2M_\omega^2 q^2) B_0 (q^2, m_N^2, m_N^2) \\
& + 2 (8m_N^4 - 6q^2 m_N^2 + q^4 + (8 (M_\omega^4 - 4m_N^4) m_N^2 \\
& + q^2 (32m_N^4 - 2 (4M_\omega^2 + 5q^2) m_N^2 + (M_\omega^2 + q^2)^2)) \\
& \times C_0 (m_N^2, q^2, m_N^2, M_\omega^2, m_N^2, m_N^2) ) M_\omega^2 \\
& \left. + (4m_N^2 - q^2) (4 (m_N^2 + M_\omega^2) - q^2) A_0 (M_\omega^2) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{20} = & - \frac{f_\omega g_\omega^3 q^2}{64M_\omega^2\pi^2 (M_\omega^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( 4 (q^2 - 4m_N^2) A_0 (m_N^2) M_\omega^2 \right. \\
& + \left( (-4q^4 + 2 (12m_N^2 + M_\omega^2) q^2 - 32m_N^2 (m_N^2 + M_\omega^2)) B_0 (m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) \right. \\
& + (32m_N^4 + 4 (4M_\omega^2 - 5q^2) m_N^2 + 3q^4 + 2M_\omega^2 q^2) B_0 (q^2, m_N^2, m_N^2) \\
& + 2 (8m_N^4 - 6q^2 m_N^2 + q^4 + (-32m_N^6 + 32q^2 m_N^4 + 2 (4M_\omega^4 - 4q^2 M_\omega^2 \\
& - 5q^4) m_N^2 + q^2 (M_\omega^2 + q^2)^2) C_0 (m_N^2, q^2, m_N^2, M_\omega^2, m_N^2, m_N^2)) \\
& \left. \right) M_\omega^2 \\
& + (4m_N^2 - q^2) (4 (m_N^2 + M_\omega^2) - q^2) A_0 (M_\omega^2) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{21} = & \frac{3f_\omega g_0^2 g_\omega q^2}{64M_\rho^2\pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2 (q^2 - M_\rho^2)} \left( 4 (q^2 - 4m_N^2) A_0 (m_N^2) M_\rho^2 \right. \\
& + \left( (-4q^4 + 2 (12m_N^2 + M_\rho^2) q^2 - 32m_N^2 (m_N^2 + M_\rho^2)) B_0 (m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) \right. \\
& + (32m_N^4 + 4 (4M_\rho^2 - 5q^2) m_N^2 + 3q^4 + 2M_\rho^2 q^2) B_0 (q^2, m_N^2, m_N^2) \\
& + 2 (8m_N^4 - 6q^2 m_N^2 + q^4 + (-32m_N^6 + 32q^2 m_N^4 + 2 (4M_\rho^4 - 4q^2 M_\rho^2 \\
& - 5q^4) m_N^2 + q^2 (M_\rho^2 + q^2)^2) C_0 (m_N^2, q^2, m_N^2, M_\rho^2, m_N^2, m_N^2)) \\
& \left. \right) M_\rho^2 \\
& + (4m_N^2 - q^2) (4 (m_N^2 + M_\rho^2) - q^2) A_0 (M_\rho^2) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{22} = & \frac{3 f_\omega g_A^2 g_\omega q^2}{64F_\pi^2\pi^2 (M_\omega^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (8m_N^2 q^2 - 2q^4) A_0 (m_N^2) \right. \\
& + (q^4 - 16m_N^4) A_0 (M_\pi^2) + 2 \left( (-q^4 + 4m_N^2 q^2 + (q^4 - 2M_\pi^2 q^2 \right. \\
& - 4m_N^2 (4M_\pi^2 + q^2)) B_0 (q^2, m_N^2, m_N^2) + 2M_\pi^2 (16m_N^4 - 4 (2M_\pi^2 \\
& + q^2) m_N^2 - M_\pi^2 q^2) C_0 (m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) ) m_N^2 \\
& \left. + M_\pi^2 (16m_N^4 + 6q^2 m_N^2 - q^4) B_0 (m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) \right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{28+29} = & -\frac{3 \mathfrak{g}_A g_\omega g_{\omega\rho\pi} M_\rho^2}{128 F_\pi g \pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} (q^6 - 4m_N^2 q^4 \\
& + (16m_N^2 q^2 - 4q^4) A_0(m_N^2) + (2q^4 - 8m_N^2 q^2) A_0(M_\pi^2) \\
& + (2q^4 - 8m_N^2 q^2) A_0(M_\omega^2) - 2(4(M_\pi^2 - M_\omega^2) m_N^4 \\
& + 2(2m_N^2 - 4M_\pi^2 - M_\omega^2) q^2 m_N^2 + (2m_N^2 + M_\pi^2) q^4) \\
& \times B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + 2(4(M_\pi^2 - M_\omega^2) m_N^4 \\
& + 2(-2m_N^2 + M_\pi^2 + 4M_\omega^2) q^2 m_N^2 - (2m_N^2 + M_\omega^2) q^4) \\
& \times B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) + (12m_N^2 q^4 \\
& - 12m_N^2 M_\pi^2 q^2 - 12m_N^2 M_\omega^2 q^2) B_0(q^2, M_\pi^2, M_\omega^2) + (4m_N^2 q^6 \\
& + 8m_N^4 q^4 - 8m_N^2 M_\pi^2 q^4 - 8m_N^2 M_\omega^2 q^4 + 4m_N^2 M_\pi^4 q^2 + 4m_N^2 M_\omega^4 q^2 \\
& - 16m_N^4 M_\pi^2 q^2 - 16m_N^4 M_\omega^2 q^2 + 16m_N^2 M_\pi^2 M_\omega^2 q^2 + 8m_N^4 M_\pi^4 \\
& + 8m_N^4 M_\omega^4 - 16m_N^4 M_\pi^2 M_\omega^2) C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\omega^2, M_\pi^2, m_N^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{30+31} = & -\frac{3 f_\omega g \mathfrak{g}_A g_{\omega\rho\pi} q^2}{64 F_\pi \pi^2 (M_\omega^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} (q^6 - 4m_N^2 q^4 \\
& + (16m_N^2 q^2 - 4q^4) A_0(m_N^2) \\
& + (2q^4 - 8m_N^2 q^2) A_0(M_\rho^2) + (2q^4 - 8m_N^2 q^2) A_0(M_\pi^2) \\
& - 2(4(M_\rho^2 - M_\pi^2) m_N^4 + 2(2m_N^2 - 4M_\rho^2 - M_\pi^2) q^2 m_N^2 \\
& + (2m_N^2 + M_\rho^2) q^4) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) + 2(4(M_\rho^2 - M_\pi^2) m_N^4 \\
& + 2(-2m_N^2 + M_\rho^2 + 4M_\pi^2) q^2 m_N^2 - (2m_N^2 + M_\pi^2) q^4) \\
& \times B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + (12m_N^2 q^4 - 12m_N^2 M_\rho^2 q^2 - 12m_N^2 M_\pi^2 q^2) \\
& \times B_0(q^2, M_\rho^2, M_\pi^2) + (4m_N^2 q^6 + 8m_N^4 q^4 - 8m_N^2 M_\rho^2 q^4 \\
& - 8m_N^2 M_\pi^2 q^4 + 4m_N^2 M_\rho^4 q^2 + 4m_N^2 M_\pi^4 q^2 - 16m_N^4 M_\rho^2 q^2 \\
& - 16m_N^4 M_\pi^2 q^2 + 16m_N^2 M_\rho^2 M_\pi^2 q^2 + 8m_N^4 M_\rho^4 + 8m_N^4 M_\pi^4 \\
& - 16m_N^4 M_\rho^2 M_\pi^2) C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\rho^2, M_\pi^2, m_N^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{32} = & \frac{g_{\omega\rho\pi}^2 M_\rho^2 \tau_3}{1152 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)^2} (-q^4 + 3(M_\pi^2 + M_\omega^2) q^2 \\
& - 3(M_\pi^2 - M_\omega^2 + q^2) A_0(M_\pi^2) + 3(M_\pi^2 - M_\omega^2 - q^2) A_0(M_\omega^2) \\
& + 3(M_\pi - M_\omega - q)(M_\pi + M_\omega - q)(M_\pi - M_\omega + q) \\
& (M_\pi + M_\omega + q) B_0(q^2, M_\pi^2, M_\omega^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{33} &= \frac{f_\omega g_\omega g_{\omega\rho\pi}^2 q^2}{192\pi^2 (M_\omega^2 - q^2)^2} (-q^4 + 3(M_\rho^2 + M_\pi^2) q^2 \\
&\quad - 3(M_\rho^2 - M_\pi^2 + 13q^2) A_0(M_\rho^2) + 3(M_\rho^2 - M_\pi^2 + 11q^2) A_0(M_\pi^2) \\
&\quad + 3(13q^4 + 2(5M_\rho^2 - 7M_\pi^2) q^2 + (M_\rho^2 - M_\pi^2)^2) B_0(q^2, M_\rho^2, M_\pi^2)), \\
F_1^{34} &= -\frac{f_\omega g_{2\omega\rho\rho}^2 g_\omega q^2}{384M_\rho^2\pi^2 (M_\omega^2 - q^2)^2} (9M_\rho^4 - 39q^2 M_\rho^2 + 8q^4 \\
&\quad - 6(9M_\rho^2 + 13q^2) A_0(M_\rho^2) + (300q^4 - 336M_\rho^2 q^2) B_0(q^2, M_\rho^2, M_\rho^2)).
\end{aligned}$$

Die nichtrenormierten Beiträge zum Pauli-Formfaktor  $F_2$  lauten:

$$\begin{aligned}
F_2^{2+3} &= 2d_7 q^2 + d_6 \tau_3 q^2 + c_7 m_N + 2c_6 m_N \tau_3, \\
F_2^6 &= \frac{3g_A^2 m_N^2}{16F_\pi^2\pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2} (m_N^4 (q^2 - 4m_N^2) \\
&\quad + m_N^2 (q^2 - 4m_N^2) (A_0(m_N^2) - A_0(M_\pi^2)) \\
&\quad + m_N^2 M_\pi^2 (q^2 - 10m_N^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) \\
&\quad + m_N^4 (4m_N^2 + 6M_\pi^2 - q^2) B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) \\
&\quad + 2m_N^4 M_\pi^2 (-4m_N^2 + 3M_\pi^2 + q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2)), \\
F_2^7 &= \frac{\tau_3 g_A^2 M_\rho^2 m_N^2}{16F_\pi^2\pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} (m_N^4 (q^2 - 4m_N^2) \\
&\quad + m_N^2 (q^2 - 4m_N^2) (A_0(m_N^2) - A_0(M_\pi^2)) \\
&\quad + m_N^2 M_\pi^2 (q^2 - 10m_N^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) \\
&\quad + m_N^4 (4m_N^2 + 6M_\pi^2 - q^2) B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) \\
&\quad + 2m_N^4 M_\pi^2 (-4m_N^2 + 3M_\pi^2 + q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{10} = & \frac{g_A^2 m_N^2 M_\rho^2 \tau_3}{4F_\pi^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (A_0(m_N^2) - A_0(m_N^2)) (q^2 - 4m_N^2) \right. \\
& + B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) (4m_N^4 + 2(q^2 - 5M_\pi^2)m_N^2 + M_\pi^2 q^2) \\
& + 3B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) m_N^2 (2M_\pi^2 - q^2) + C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) \\
& \times m_N^2 (-6M_\pi^4 + 4q^2 M_\pi^2 - q^4 + m_N^2 (8M_\pi^2 - 2q^2)) \\
& \left. + 4m_N^4 - m_N^2 q^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{11} = & \frac{3g_0^2}{32\pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (m_N^2 q^2 - 4m_N^4) (m_N^2 + A_0(m_N^2) - A_0(M_\pi^2)) \right. \\
& + B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) (8m_N^4 - 2(5M_\rho^2 + q^2)m_N^2 + M_\rho^2 q^2) \\
& + m_N^2 B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) (-4m_N^2 + 6M_\rho^2 + q^2) \\
& \left. + 2m_N^2 M_\rho^2 (-8m_N^2 + 3M_\rho^2 + 2q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{12} = & \frac{g_0^2 M_\rho^2 \tau_3}{32\pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (m_N^2 q^2 - 4m_N^4) (m_N^2 + A_0(m_N^2) \right. \\
& - A_0(M_\pi^2)) + (8m_N^4 - 2(5M_\rho^2 + q^2)m_N^2 + M_\rho^2 q^2) \\
& \times B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + m_N^2 B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) (-4m_N^2 + 6M_\rho^2 + q^2) \\
& \left. + 2m_N^2 M_\rho^2 (-8m_N^2 + 3M_\rho^2 + 2q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{13} = & \frac{g_0^2 M_\rho^2 \tau_3}{8\pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (q^2 - 4m_N^2) (A_0(m_N^2) - A_0(M_\rho^2) \right. \\
& - m_N^2) + (2(6m_N^2 - 5M_\rho^2)m_N^2 + M_\rho^2 q^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) \\
& + (2m_N^2(3M_\rho^2 - 4m_N^2) - m_N^2 q^2) B_0(q^2, M_\rho^2, M_\rho^2) \\
& + (2m_N^2 M_\rho^2(8m_N^2 - 3M_\rho^2) - m_N^2(6m_N^2 - 2M_\rho^2)q^2) \\
& \left. \times C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\rho^2, M_\rho^2, m_N^2) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{18} = & \frac{g_\omega^2}{32\pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2} \left( (m_N^2 q^2 - 4m_N^4) (m_N^2 + A_0(m_N^2) - A_0(M_\pi^2)) \right. \\
& + B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) (8m_N^4 - 2(5M_\omega^2 + q^2)m_N^2 + M_\omega^2 q^2) \\
& + m_N^2 B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) (-4m_N^2 + 6M_\omega^2 + q^2) \\
& \left. + 2m_N^2 M_\omega^2 (-8m_N^2 + 3M_\omega^2 + 2q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{19} = & \frac{\tau_3 M_\rho^2 g_\omega^2}{32\pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} ( (m_N^2 q^2 - 4m_N^4) (m_N^2 + A_0(m_N^2)) \\
& - A_0(M_\pi^2) ) + (8m_N^4 - 2(5M_\omega^2 + q^2) m_N^2 + M_\omega^2 q^2) \\
& \times B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + m_N^2 B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) (-4m_N^2 + 6M_\omega^2 + q^2) \\
& + 2m_N^2 M_\omega^2 (-8m_N^2 + 3M_\omega^2 + 2q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{20} = & \frac{f_\omega g_\omega^3 q^2}{16\pi^2 (M_\omega^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} ( (m_N^2 q^2 - 4m_N^4) (m_N^2 + A_0(m_N^2)) \\
& - A_0(M_\pi^2) ) + (8m_N^4 - 2(5M_\omega^2 + q^2) m_N^2 + M_\omega^2 q^2) \\
& \times B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + m_N^2 B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) (-4m_N^2 + 6M_\omega^2 + q^2) \\
& + 2m_N^2 M_\omega^2 (-8m_N^2 + 3M_\omega^2 + 2q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{21} = & \frac{3 f_\omega g_0^2 g_\omega q^2}{16\pi^2 (M_\omega^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} ( (m_N^2 q^2 - 4m_N^4) (m_N^2 + A_0(m_N^2)) \\
& - A_0(M_\pi^2) ) + (8m_N^4 - 2(5M_\omega^2 + q^2) m_N^2 + M_\omega^2 q^2) \\
& \times B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + m_N^2 B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) (-4m_N^2 + 6M_\omega^2 + q^2) \\
& + 2m_N^2 M_\omega^2 (-8m_N^2 + 3M_\omega^2 + 2q^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{22} = & \frac{3f_\omega g_A^2 g_\omega m_N^2 q^2}{8F_\pi^2 \pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2 (q^2 - M_\omega^2)} ( 4m_N^4 - q^2 m_N^2 \\
& + (4m_N^2 - q^2) A_0(m_N^2) + (q^2 - 4m_N^2) A_0(M_\pi^2) \\
& + (10m_N^2 M_\pi^2 - M_\pi^2 q^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + (-4m_N^4 \\
& - 6M_\pi^2 m_N^2 + q^2 m_N^2) B_0(q^2, m_N^2, m_N^2) + (8M_\pi^2 m_N^4 \\
& - 6M_\pi^4 m_N^2 - 2M_\pi^2 q^2 m_N^2) C_0(m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_N^2, m_N^2) ) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{28+29} = & -\frac{3 \mathfrak{g}_A g_\omega g_{\omega\rho\pi} m_N^2 M_\rho^2}{32 F_\pi g \pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} (32m_N^4 - 12q^2 m_N^2 + q^4 \\
& + 4(q^2 - 4m_N^2) A_0(m_N^2) + (8m_N^2 - 2q^2) A_0(M_\pi^2) \\
& + (8m_N^2 - 2q^2) A_0(M_\omega^2) + (-10m_N^2 M_\pi^2 + q^2 M_\pi^2 - 6m_N^2 M_\omega^2 \\
& + 6m_N^2 q^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) + (-6m_N^2 M_\pi^2 - 10m_N^2 M_\omega^2 \\
& + 6m_N^2 q^2 + M_\omega^2 q^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) + (-q^4 - 8m_N^2 q^2 \\
& + M_\pi^2 q^2 + M_\omega^2 q^2 + 8m_N^2 M_\pi^2 + 8m_N^2 M_\omega^2) B_0(q^2, M_\pi^2, M_\omega^2) \\
& - (6m_N^2 M_\pi^4 + 4m_N^2 M_\omega^2 M_\pi^2 - 12m_N^2 q^2 M_\pi^2 + 2M_\omega^2 q^2 M_\pi^2 + 6m_N^2 M_\omega^4 \\
& + 6m_N^2 q^4 - 12m_N^2 M_\omega^2 q^2) C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\omega^2, M_\pi^2, m_N^2) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{30+31} = & -\frac{3 f_\omega g \mathfrak{g}_A g_{\omega\rho\pi} m_N^2 q^2}{16 F_\pi \pi^2 (M_\omega^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} (32m_N^4 - 12q^2 m_N^2 + q^4 \\
& + 4(q^2 - 4m_N^2) A_0(m_N^2) \\
& + (8m_N^2 - 2q^2) A_0(M_\rho^2) + (8m_N^2 - 2q^2) A_0(M_\pi^2) \\
& - (10m_N^2 M_\rho^2 - q^2 M_\rho^2 + 6m_N^2 M_\pi^2 - 6m_N^2 q^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) \\
& - (6m_N^2 M_\rho^2 + 10m_N^2 M_\pi^2 - 6m_N^2 q^2 - M_\pi^2 q^2) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\pi^2) \\
& + (-q^4 - 8m_N^2 q^2 + M_\rho^2 q^2 + M_\pi^2 q^2 + 8m_N^2 M_\rho^2 \\
& + 8m_N^2 M_\pi^2) B_0(q^2, M_\rho^2, M_\pi^2) + (-6m_N^2 M_\rho^4 - 4m_N^2 M_\pi^2 M_\rho^2 \\
& + 12m_N^2 q^2 M_\rho^2 - 2M_\pi^2 q^2 M_\rho^2 - 6m_N^2 M_\pi^4 - 6m_N^2 q^4 \\
& + 12m_N^2 M_\pi^2 q^2) C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\rho^2, M_\pi^2, m_N^2) .
\end{aligned}$$

Da die Summe der Diagramme (24), (25), (26) und (27) genau null ergibt, sind ihre einzelnen Beiträge zu  $F_1$  und  $F_2$ , sowie  $\Delta F_1$  und  $\Delta F_2$ , nicht explizit aufgeführt. Alle weiteren nicht gelisteten Anteile betragen ebenfalls null.

Die Abzugsterme für den Dirac-Formfaktor sind gegeben durch:

$$\Delta F_1^{8+9+10} = \frac{\mathfrak{g}_A^2 q^2 \tau_3 A_0(m_N^2)}{16 F_\pi^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} ,$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_1^{11-13} = & \frac{g_0^2}{768m_N^6 M_\rho^2 (4m_N^2 - M_\rho^2)^{3/2} \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} \\
& \times ( 6\pi q^2 \tau_3 M_\rho^{11} - 16q^2 \tau_3 \cos^{-1} ( M_\rho/(2m_N) ) M_\rho^{11} \\
& + 160m_N^2 q^2 \tau_3 \cos^{-1} ( M_\rho/2m_N ) M_\rho^9 + 204m_N^4 \pi q^2 \tau_3 M_\rho^7 \\
& - 384m_N^4 q^2 \tau_3 \cos^{-1} ( M_\rho/2m_N ) M_\rho^7 + 224m_N^6 \pi q^2 \tau_3 M_\rho^5 \\
& - 512m_N^6 q^2 \tau_3 \cos^{-1} ( M_\rho/2m_N ) M_\rho^5 - 1040m_N^8 \pi q^2 \tau_3 M_\rho^3 \\
& + 2048m_N^8 q^2 \tau_3 \cos^{-1} ( M_\rho/2m_N ) M_\rho^3 - 72m_N^2 \pi q^2 \tau_3 M_\rho^9 \\
& + ( - 448m_N^6 q^2 \tau_3 M_\rho^5 + 144m_N^2 q^2 \tau_3 M_\rho^9 - 408m_N^4 q^2 \tau_3 M_\rho^7 \\
& - 12q^2 \tau_3 M_\rho^{11} + 2080m_N^8 q^2 \tau_3 M_\rho^3 ) \cos^{-1} ( \sqrt{1 - M_\rho^2/(4m_N^2)} ) \\
& + \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} ( 4q^2 \tau_3 \log ( M_\rho/m_N ) M_\rho^{10} \\
& - 4m_N^2 q^2 \tau_3 M_\rho^8 - 8m_N^2 q^2 \tau_3 \log ( M_\rho/m_N ) M_\rho^8 \\
& - 36m_N^4 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^8 + 12m_N^4 \tau_3 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^8 \\
& - 48m_N^4 \tau_3 \log ( M_\rho/\mu ) M_\rho^8 - 30m_N^2 q^2 \tau_3 \log ( M_\rho/\mu ) M_\rho^8 \\
& + 54m_N^6 M_\rho^6 + 54m_N^6 \tau_3 M_\rho^6 + 20m_N^4 q^2 \tau_3 M_\rho^6 \\
& - 32m_N^4 q^2 \tau_3 \log ( M_\rho/m_N ) M_\rho^6 + 72m_N^6 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^6 \\
& + 36m_N^4 q^2 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^6 - 24m_N^6 \tau_3 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^6 \\
& + 128m_N^6 \tau_3 \log ( M_\rho/\mu ) M_\rho^6 + 168m_N^4 q^2 \tau_3 \log ( M_\rho/\mu ) M_\rho^6 \\
& - 54m_N^6 q^2 M_\rho^4 + 60m_N^6 q^2 \tau_3 M_\rho^4 + 288m_N^8 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^4 \\
& - 72m_N^6 q^2 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^4 - 96m_N^8 \tau_3 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^4 \\
& + 256m_N^8 \tau_3 \log ( M_\rho/\mu ) M_\rho^4 - 120m_N^6 q^2 \tau_3 \log ( M_\rho/\mu ) M_\rho^4 \\
& - 256m_N^8 q^2 \tau_3 M_\rho^2 - 288m_N^8 q^2 \log ( m_N/\mu ) M_\rho^2 \\
& - 288m_N^8 q^2 \tau_3 \log ( M_\rho/\mu ) M_\rho^2 + ( - 18m_N^2 M_\rho^8 + 6m_N^2 \tau_3 M_\rho^8 \\
& - 18m_N^4 M_\rho^6 + 18m_N^2 q^2 M_\rho^6 - 66m_N^4 \tau_3 M_\rho^6 - 36m_N^2 q^2 \tau_3 M_\rho^6 \\
& + 144m_N^6 M_\rho^4 + 18m_N^4 q^2 M_\rho^4 - 48m_N^6 \tau_3 M_\rho^4 + 120m_N^4 q^2 \tau_3 M_\rho^4 \\
& - 144m_N^6 q^2 M_\rho^2 - 48m_N^6 q^2 \tau_3 M_\rho^2 ) A_0 ( m_N^2 ) + ( - 216M_\rho^2 m_N^8 \\
& + 216q^2 m_N^8 - 88M_\rho^2 \tau_3 m_N^8 - 16q^2 \tau_3 m_N^8 - 54M_\rho^4 m_N^6 \\
& + 54M_\rho^2 q^2 m_N^6 + 10M_\rho^4 \tau_3 m_N^6 + 28M_\rho^2 q^2 \tau_3 m_N^6 + 54M_\rho^6 m_N^4 \\
& - 54M_\rho^4 q^2 m_N^4 + 30M_\rho^6 \tau_3 m_N^4 - 72M_\rho^4 q^2 \tau_3 m_N^4 + 21M_\rho^6 q^2 \tau_3 m_N^2 ) \\
& \times A_0 ( M_\rho^2 ) + ( 216M_\rho^4 m_N^8 - 216M_\rho^2 q^2 m_N^8 + 216M_\rho^4 \tau_3 m_N^8 \\
& + 48M_\rho^2 q^2 \tau_3 m_N^8 + 108M_\rho^6 m_N^6 - 108M_\rho^4 q^2 m_N^6 + 108M_\rho^6 \tau_3 m_N^6 \\
& - 240M_\rho^4 q^2 \tau_3 m_N^6 - 54M_\rho^8 m_N^4 + 54M_\rho^6 q^2 m_N^4 - 54M_\rho^8 \tau_3 m_N^4 \\
& + 192M_\rho^6 q^2 \tau_3 m_N^4 - 36M_\rho^8 q^2 \tau_3 m_N^2 ) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) ) ,
\end{aligned}$$

$$\Delta F_1^{14+16} = \frac{g_0^2 q^2 \tau_3 \left( 20 \left( 42 \log \left( \frac{M_\rho}{\mu} \right) + 19 \right) M_\rho^2 + q^2 \left( 1240 \log \left( \frac{M_\rho}{\mu} \right) + 431 \right) \right)}{960 M_\rho^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)},$$

$$\begin{aligned} \Delta F_1^{18+19} &= \frac{3g_\omega^2}{128m_N^2 M_\omega^2 (4m_N^2 - M_\omega^2) \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} \\ &\times \left( (M_\rho^2 (\tau_3 + 1) - q^2) (-B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) M_\omega^6 + m_N^2 M_\omega^4 \right. \\ &- A_0(m_N^2) M_\omega^4 + 2m_N^2 B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) M_\omega^4 \\ &\left. + 4m_N^4 B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) M_\omega^2 - (4m_N^4 + M_\omega^2 m_N^2 - M_\omega^4) A_0(M_\omega^2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_1^{20} &= \frac{3f_\omega g_\omega^3}{64m_N^2 M_\omega^2 (4m_N^2 - M_\omega^2) \pi^2 (M_\omega^2 - q^2)} \\ &\times \left( -B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) M_\omega^6 + m_N^2 M_\omega^4 \right. \\ &- A_0(m_N^2) M_\omega^4 + 2m_N^2 B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) M_\omega^4 \\ &\left. + 4m_N^4 B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) M_\omega^2 - (4m_N^4 + M_\omega^2 m_N^2 - M_\omega^4) A_0(M_\omega^2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_1^{21} &= \frac{9f_\omega g_\omega g_\rho^2}{64m_N^2 M_\rho^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} \\ &\times \left( -B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) M_\rho^6 + m_N^2 M_\rho^4 \right. \\ &- A_0(m_N^2) M_\rho^4 + 2m_N^2 B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) M_\rho^4 \\ &\left. + 4m_N^4 B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) M_\rho^2 - (4m_N^4 + M_\rho^2 m_N^2 - M_\rho^4) A_0(M_\rho^2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_1^{28-31} &= \frac{\mathfrak{g}_A g_\omega g_{\omega\rho\pi} M_\rho^2}{430080 F_\pi g m_N^8 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} \\ &\times \left( q^2 (21 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} {}_2F_1(2, 2; 9/2; M_\omega^2/4m_N^2) M_\omega^8 \right. \\ &+ 2(70m_N^4 (3\pi M_\omega^5 + 96 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(M_\omega/m_N) M_\omega^4 \\ &+ 11 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} M_\omega^4 - 42m_N^2 \pi M_\omega^3 \\ &+ 180m_N^2 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(m_N) M_\omega^2 \\ &- 180m_N^2 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(M_\omega) M_\omega^2 \\ &- 108m_N^2 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log\left(\frac{M_\omega}{m_N}\right) M_\omega^2 - 156m_N^2 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} M_\omega^2 \\ &+ 120m_N^4 \pi M_\omega - 6(17M_\omega^5 - 94m_N^2 M_\omega^3 + 104m_N^4 M_\omega) \cos^{-1}(M_\omega/2m_N) \\ &\left. + 72m_N^4 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} - 9M_\omega^8 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} {}_2F_1(2, 2; 9/2; M_\omega^2/4m_N^2) \right)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_1^{32} = & \frac{1}{576\pi^2 (q^2 - M_\rho^2)} ( g_{\omega\rho\pi}^2 \tau_3 ( - 6 \log(M_\omega/\mu) M_\omega^4 - 3A_0 ( M_\omega^2 ) M_\omega^2 \\
& - \frac{1}{2M_\rho^4} ( 12M_\rho^4 \log(M_\pi) M_\pi^4 - 3M_\rho^2 q^2 ( 8 \log(M_\omega/\mu) M_\rho^2 + 3M_\rho^2 \\
& + 2A_0 ( M_\omega^2 ) - 4 ( M_\rho^2 - M_\omega^2 ) \log ( M_\pi/M_\omega ) + 8M_\omega^2 \log(M_\omega) ) M_\pi^2 \\
& + 6 ( M_\pi^2 M_\rho^4 + ( M_\rho^4 - M_\rho^2 M_\omega^2 ) q^2 ) A_0 ( M_\pi^2 ) + q^4 ( 7M_\rho^4 \\
& - 9M_\omega^2 M_\rho^2 + 6 ( M_\rho^2 + M_\omega^2 ) A_0 ( M_\omega^2 ) + 12 ( M_\rho^2 - M_\omega^2 )^2 \log(M_\omega/\mu) ) ) \\
& + \frac{3}{2M_\rho^2} ( 2M_\rho^2 A_0 ( M_\pi^2 ) M_\omega^2 + ( 4M_\rho^2 ( \log ( M_\pi/M_\omega ) + 2 \log(M_\omega/\mu) ) M_\pi^2 \\
& + q^2 ( 8 \log(M_\omega/\mu) M_\rho^2 + 3M_\rho^2 - 4M_\omega^2 \log(M_\omega/\mu) ) ) M_\omega^2 \\
& + 2 ( M_\rho^2 M_\pi^2 - ( M_\rho^2 + M_\omega^2 ) q^2 ) A_0 ( M_\omega^2 ) ) ) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_1^{33} = & - \frac{f_\omega g_\omega g_{\omega\rho\pi}^2 q^2}{96M_\omega^6 \pi^2 (q^2 - M_\omega^2)} ( - 3M_\rho^2 ( 2 \log(M_\rho/\mu) M_\rho^2 + A_0 ( M_\rho^2 ) ) M_\omega^4 \\
& - \frac{1}{2} ( q^4 + 3 ( M_\rho^2 + M_\pi^2 + 4M_\pi^2 \log ( M_\pi/M_\rho ) ) q^2 + 12 ( \log(M_\rho/\mu) M_\pi^4 \\
& + ( M_\rho^2 - M_\pi^2 ) \log ( M_\pi/M_\rho ) M_\pi^2 ) ) M_\omega^4 + \frac{3}{2} ( ( 2A_0 ( M_\pi^2 ) M_\omega^2 \\
& + 4M_\pi^2 ( 3 \log(M_\rho/\mu) - \log(M_\pi) ) M_\omega^2 + q^2 ( M_\omega^2 - 4 ( M_\rho^2 \\
& + 10M_\omega^2 ) \log(M_\rho/\mu) ) ) M_\rho^2 + 2 ( M_\pi^2 M_\omega^2 - ( M_\rho^2 \\
& + 13M_\omega^2 ) q^2 ) A_0 ( M_\rho^2 ) ) M_\omega^2 + 3q^2 ( A_0 ( M_\rho^2 ) M_\pi^2 + ( M_\omega^2 \\
& + 4 ( M_\rho^2 + 7M_\omega^2 ) \log(M_\rho/\mu) ) M_\pi^2 - \frac{1}{2} ( M_\rho^2 + 10M_\omega^2 ) \\
& \times ( 4 \log ( M_\pi/M_\rho ) M_\pi^2 + q^2 ) ) M_\omega^2 + ( 3M_\omega^2 ( M_\rho^2 + 11M_\omega^2 ) q^2 \\
& - 3M_\pi^2 M_\omega^4 ) A_0 ( M_\pi^2 ) + q^4 ( - M_\omega^4 + 3M_\rho^2 M_\omega^2 - 3 ( M_\rho^2 \\
& + 13M_\omega^2 ) A_0 ( M_\rho^2 ) - 6 ( M_\rho^4 + 10M_\omega^2 M_\rho^2 + 13M_\omega^4 ) \log(M_\rho/\mu) ) ) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_1^{34} = & - \frac{f_\omega g_{2\omega\rho\rho}^2 g_\omega q^2}{128M_\rho^2 M_\omega^4 \pi^2 (M_\omega^2 - q^2)} ( M_\rho^2 ( 3M_\rho^2 M_\omega^2 + q^2 ( 3M_\rho^2 + 99M_\omega^2 \\
& + 224M_\omega^2 \log(M_\rho/\mu) ) ) - 2 ( 9M_\rho^2 M_\omega^2 + ( 9M_\rho^2 + 13M_\omega^2 ) q^2 ) A_0 ( M_\rho^2 ) ) .
\end{aligned}$$

Die Abzugsterme für den Pauli-Formfaktor lauten:

$$\Delta F_2^{6-9} = \frac{\mathfrak{g}_A^2 m_N^2 ((5\tau_3 - 3)M_\rho^2 + 3q^2)}{32F_\pi^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} ,$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_2^{11-13} = & \frac{-g_0^2}{768m_N^6 (4m_N^2 - M_\rho^2)^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} (576q^2 m_N^{10} + 128q^2 \tau_3 m_N^{10} \\
& - 1440M_\rho^2 q^2 m_N^8 - 144M_\rho^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) m_N^8 - 1504M_\rho^2 q^2 \tau_3 m_N^8 \\
& + 2080M_\rho \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} \pi q^2 \tau_3 m_N^8 - 528M_\rho^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 m_N^8 \\
& + 612M_\rho^4 q^2 m_N^6 + 324M_\rho^4 (4m_N^2 - M_\rho^2) m_N^6 + 1488M_\rho^4 q^2 \tau_3 m_N^6 \\
& - 2268M_\rho^3 \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} \pi q^2 \tau_3 m_N^6 + 420M_\rho^4 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 m_N^6 \\
& - 72M_\rho^6 q^2 m_N^4 - 72M_\rho^6 (4m_N^2 - M_\rho^2) m_N^4 - 472M_\rho^6 q^2 \tau_3 m_N^4 \\
& + 894M_\rho^5 \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} \pi q^2 \tau_3 m_N^4 - 72M_\rho^6 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 m_N^4 \\
& + q^2 \tau_3 m_N^2 (48M_\rho^8 - 150M_\rho^7 \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} \pi) + 24M_\rho^3 (4m_N^2 - M_\rho^2)^{3/2} \\
& \times (6(3\tau_3 + 1)m_N^4 - 4M_\rho^2 (4\tau_3 + 3)m_N^2 + 3M_\rho^4 (\tau_3 + 1)) \\
& \times \cos^{-1}(M_\rho/(2m_N)) m_N^2 + 9M_\rho^9 \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} \pi q^2 \tau_3 + 2M_\rho (4m_N^2 \\
& - M_\rho^2)^{3/2} q^2 (-4(137\tau_3 + 18)m_N^6 + 2M_\rho^2 (299\tau_3 + 72)m_N^4 \\
& - 2M_\rho^4 (121\tau_3 + 18)m_N^2 + 33M_\rho^6 \tau_3) \cos^{-1}(M_\rho/(2m_N)) \\
& - 2M_\rho \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} (2080m_N^8 - 2268M_\rho^2 m_N^6 + 894M_\rho^4 m_N^4 \\
& - 150M_\rho^6 m_N^2 + 9M_\rho^8) q^2 \tau_3 \cos^{-1}\left(\sqrt{1 - (M_\rho^2/(4m_N^2))}\right) \\
& + (1728M_\rho^2 q^2 m_N^8 + 1248M_\rho^2 q^2 \tau_3 m_N^8 - 1008M_\rho^4 q^2 m_N^6 \\
& - 1800M_\rho^4 q^2 \tau_3 m_N^6 + 144M_\rho^6 q^2 m_N^4 + 708M_\rho^6 q^2 \tau_3 m_N^4 \\
& + 48M_\rho^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) (8\tau_3 m_N^4 - M_\rho^2 (13\tau_3 + 9)m_N^2 \\
& + 3M_\rho^4 (\tau_3 + 1)) m_N^4 - 84M_\rho^8 q^2 \tau_3 m_N^2) \log(m_N/\mu) + (-1728M_\rho^2 q^2 m_N^8 \\
& - 384M_\rho^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 m_N^8 + 432M_\rho^4 (4m_N^2 - M_\rho^2) m_N^6 \\
& + 1800M_\rho^4 q^2 \tau_3 m_N^6 + 624M_\rho^4 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 m_N^6 - 144M_\rho^6 \\
& \times (4m_N^2 - M_\rho^2) m_N^4 - 708M_\rho^6 q^2 \tau_3 m_N^4 - 144M_\rho^6 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 m_N^4 \\
& - 1248M_\rho^2 q^2 \tau_3 m_N^8 - 144M_\rho^6 q^2 m_N^4 + 1008M_\rho^4 q^2 m_N^6 + 84M_\rho^8 q^2 \tau_3 m_N^2) \\
& \times \log(M_\rho/\mu) + (-48q^2 \tau_3 M_\rho^{10} + 72m_N^2 q^2 M_\rho^8 + 72m_N^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) \\
& \times M_\rho^8 + 460m_N^2 q^2 \tau_3 M_\rho^8 + 72m_N^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 M_\rho^8 - 576m_N^4 q^2 M_\rho^6 \\
& - 288m_N^4 (4m_N^2 - M_\rho^2) M_\rho^6 - 384m_N^4 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 M_\rho^6 \\
& + 1296m_N^6 q^2 M_\rho^4 + 144m_N^6 (4m_N^2 - M_\rho^2) M_\rho^4 + 1528m_N^6 q^2 \tau_3 M_\rho^4 \\
& - 1436m_N^4 q^2 \tau_3 M_\rho^6 + 432m_N^6 (4m_N^2 - M_\rho^2) \tau_3 M_\rho^4 - 576m_N^8 q^2 M_\rho^2 \\
& - 288m_N^8 q^2 \tau_3 M_\rho^2) \log(M_\rho/m_N),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta F_2^{18+19} &= \frac{g_\omega^2 (M_\rho^2(\tau_3 + 1) - q^2)}{64m_N^2 (4m_N^2 - M_\omega^2) \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} \left( -m_N^2 M_\omega^2 \right. \\
&\quad + (2M_\omega^2 - 4m_N^2) A_0(m_N^2) + (6m_N^2 - 2M_\omega^2) A_0(M_\omega^2) \\
&\quad \left. + (4m_N^4 - 8M_\omega^2 m_N^2 + 2M_\omega^4) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) \right), \\
\Delta F_2^{20} &= \frac{g_\omega^3 f_\omega q^2}{32m_N^2 (4m_N^2 - M_\omega^2) \pi^2 (M_\omega^2 - q^2)} \left( -m_N^2 M_\omega^2 \right. \\
&\quad + (2M_\omega^2 - 4m_N^2) A_0(m_N^2) + (6m_N^2 - 2M_\omega^2) A_0(M_\omega^2) \\
&\quad \left. + (4m_N^4 - 8M_\omega^2 m_N^2 + 2M_\omega^4) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\omega^2) \right), \\
\Delta F_2^{21} &= \frac{3g_\omega g_0 f_\omega q^2}{32m_N^2 (4m_N^2 - M_\rho^2) \pi^2 (M_\omega^2 - q^2)} \left( -m_N^2 M_\rho^2 \right. \\
&\quad + (2M_\rho^2 - 4m_N^2) A_0(m_N^2) + (6m_N^2 - 2M_\rho^2) A_0(M_\rho^2) \\
&\quad \left. + (4m_N^4 - 8M_\rho^2 m_N^2 + 2M_\rho^4) B_0(m_N^2, m_N^2, M_\rho^2) \right), \\
\Delta F_2^{28-31} &= \frac{1}{143360 F_\pi g_0 m_N^8 \pi^2} \left( \mathfrak{g}_A g_{\omega\rho\pi} \left( \frac{-26880 f_\omega g_0^2 q^2}{M_\omega^2 - q^2} (2m_N^4 - M_\rho^2 m_N^2) \right. \right. \\
&\quad + 2(m_N^2 + M_\rho^2) \log(m_N/\mu) m_N^2 - 2M_\rho^2 \log(M_\rho) m_N^2 \\
&\quad + M_\rho^3 \sqrt{4m_N^2 - M_\rho^2} \cos^{-1}(M_\rho/m_N) + M_\rho^4 \log(M_\rho/m_N) \left. \right) m_N^6 \\
&\quad - \frac{g_\omega M_\rho^2}{\sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} (M_\rho^2 - q^2)} \left( 13440 (\sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} (2m_N^4 \right. \\
&\quad - M_\pi^2 m_N^2 - M_\omega^2 m_N^2 + 2(m_N^2 \\
&\quad + M_\pi^2 + M_\omega^2) \log(m_N) m_N^2 - M_\pi^2 \log(M_\pi/\mu) m_N^2 \\
&\quad - 2M_\pi^2 \log(M_\omega/\mu) m_N^2 - 2M_\omega^2 \log(M_\omega/\mu) m_N^2 + M_\omega^4 \log(M_\omega/m_N) \\
&\quad + M_\pi^2 M_\omega^2 \log(M_\omega/m_N)) - M_\omega (M_\omega^2 - 4m_N^2) (M_\pi^2 + M_\omega^2) \\
&\quad \times \cos^{-1}(M_\omega/(2m_N)) \left. \right) m_N^6 + q^2 (21 M_\omega^8 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \\
&\quad \times {}_2F_1(2, 2; 9/2; M_\omega^2/(4m_N^2)) - 2(9\sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \\
&\quad \times {}_2F_1(2, 2; 9/2; M_\omega^2/(4m_N^2)) M_\omega^8 + 70m_N^4 (-3\pi M_\omega^5 \\
&\quad - 48\sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(M_\omega/m_N) M_\omega^4 - 11\sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} M_\omega^4 \\
&\quad + 42m_N^2 \pi M_\omega^3 + 84m_N^2 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(M_\omega) M_\omega^2 \\
&\quad + 108m_N^2 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(M_\omega/m_N) M_\omega^2 \\
&\quad \left. + 108m_N^2 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} M_\omega^2 - 120m_N^4 \pi M_\omega \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6(9M_\omega^5 - 62m_N^2 M_\omega^3 + 104m_N^4 M_\omega) \cos^{-1}(M_\omega/(2m_N)) \\
& +12m_N^2(8m_N^2 - 7M_\omega^2) \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(m_N) \\
& -96m_N^4 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(M_\omega/\mu) - 120m_N^4 \sqrt{4m_N^2 - M_\omega^2} \log(m_N) \Big).
\end{aligned}$$

## D.2.2 Diagramme mit Deltaresonanz

Die nichtrenormierten Beiträge zum Dirac-Formfaktor  $F_1$  lauten:

$$\begin{aligned}
F_1^{35} = & \frac{g_\Delta^2 M_\rho^2 \tau_3}{5184 F_\pi^2 m_\Delta^2 m_N^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2) (q^2 - 4m_N^2)^2} ( - m_N^2 (4m_N^2 - q^2) \\
& \times ( - 72m_N^6 + 8(24M_\pi^2 - q^2) m_N^4 - 2(66M_\pi^4 - 10q^2 M_\pi^2 + q^4) m_N^2 \\
& + 36m_\Delta^3 q^2 m_N + q^6 - 8M_\pi^2 q^4 + 15M_\pi^4 q^2 + 9m_\Delta^4 (4m_N^2 - 3q^2) \\
& - 4m_\Delta (24m_N^4 - (48M_\pi^2 + 11q^2) m_N^2 - q^4 + 21M_\pi^2 q^2) m_N \\
& + 4m_\Delta^2 (12m_N^4 + (24M_\pi^2 + 22q^2) m_N^2 - 13q^4 + 3M_\pi^2 q^2) + A_0(m_\Delta^2) \\
& \times ( 18(4m_N^2 - q^2) (2(q^2 - 6m_N^2) m_\Delta^4 + (6m_N q^2 - 16m_N^3) m_\Delta^3 \\
& + (4m_N^4 + (24M_\pi^2 - 7q^2) m_N^2 - 4M_\pi^2 q^2) m_\Delta^2 + 2(m_N^3 (8M_\pi^2 + q^2) \\
& - 3m_N M_\pi^2 q^2) m_\Delta + 2(2m_N^6 + (4M_\pi^2 - q^2) m_N^4 - 6M_\pi^4 m_N^2 + M_\pi^4 q^2) ) ) \\
& + A_0(M_\pi^2) ( 6(4m_N^2 - q^2) (28m_N^6 - 4(13M_\pi^2 + 2q^2) m_N^4 \\
& + (36M_\pi^4 + 7q^2 M_\pi^2 + q^4) m_N^2 - 6M_\pi^4 q^2 + 6m_\Delta^4 (6m_N^2 - q^2) \\
& + 6m_\Delta^3 (8m_N^3 - 3m_N q^2) + 2m_\Delta^2 (8m_N^4 + (7q^2 - 36M_\pi^2) m_N^2 + 6M_\pi^2 q^2) \\
& + 2m_\Delta (16m_N^5 - (24M_\pi^2 + 7q^2) m_N^3 + 9M_\pi^2 q^2 m_N) ) ) \\
& + B_0(m_N^2, m_\Delta^2, M_\pi^2) (36((32m_N^4 - 9q^2 m_N^2 + q^4) m_\Delta^6 \\
& + 3m_N (16m_N^4 - 10q^2 m_N^2 + q^4) m_\Delta^5 + (-16m_N^6 + (25q^2 - 96M_\pi^2) m_N^4 \\
& + 27M_\pi^2 q^2 m_N^2 - 3M_\pi^2 q^4) m_\Delta^4 - 2(16m_N^7 + (48M_\pi^2 - 22q^2) m_N^5 \\
& + 6q^2 (q^2 - 5M_\pi^2) m_N^3 + 3M_\pi^2 q^4 m_N) m_\Delta^3 - ((32M_\pi^2 + 3q^2) m_N^6 \\
& - 6(16M_\pi^4 - 3q^2 M_\pi^2 + q^4) m_N^4 + M_\pi^2 q^2 (27M_\pi^2 + q^2) m_N^2 - 3M_\pi^4 q^4) m_\Delta^2 \\
& + (-16m_N^9 + (10q^2 - 32M_\pi^2) m_N^7 + (48M_\pi^4 + 20q^2 M_\pi^2 - 3q^4) m_N^5 \\
& - 30M_\pi^4 q^2 m_N^3 + 3M_\pi^4 q^4 m_N) m_\Delta - (m_N^2 - M_\pi^2)^2 (16m_N^6 \\
& + (32M_\pi^2 - 11q^2) m_N^4 + (q^4 - 9M_\pi^2 q^2) m_N^2 + M_\pi^2 q^4) ) ) \\
& + B_0(q^2, M_\pi^2, M_\pi^2) ( - 3m_N^2 ( 96m_N^8 - 4( 40M_\pi^2 + 11q^2 ) m_N^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(80M_\pi^4 + 22q^2M_\pi^2 + 3q^4)m_N^4 + (-96M_\pi^6 \\
& +76q^2M_\pi^4 - 52q^4M_\pi^2 + 6q^6)m_N^2 - 12m_\Delta^3(32m_N^4 \\
& +16(2M_\pi^2 - 3q^2)m_N^2 + 13q^4 - 20M_\pi^2q^2)m_N \\
& +4m_\Delta(48m_N^6 - 2(16M_\pi^2 + 17q^2)m_N^4 + (48M_\pi^4 + 16q^2M_\pi^2 \\
& +5q^4)m_N^2 - q^2(30M_\pi^4 - 7q^2M_\pi^2 + q^4))m_N \\
& +12m_\Delta^6(8m_N^2 + q^2) + 24m_\Delta^5(8m_N^3 - 5m_Nq^2) - q^2(12M_\pi^6 \\
& +2q^2M_\pi^4 - 6q^4M_\pi^2 + q^6) - 6m_\Delta^4(16m_N^4 + 6(8M_\pi^2 - 3q^2)m_N^2 \\
& -7q^4 + 6M_\pi^2q^2) - 4m_\Delta^2(24m_N^6 + (16M_\pi^2 - 61q^2)m_N^4 \\
& + (-72M_\pi^4 + 46q^2M_\pi^2 + 14q^4)m_N^2 - 4q^6 + 10M_\pi^2q^4 - 9M_\pi^4q^2)) \\
& +C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\pi^2, M_\pi^2, m_\Delta^2)(-36m_N^2((8m_N^2 + q^2)m_\Delta^8 \\
& +2(8m_N^3 - 5m_Nq^2)m_\Delta^7 - 4(4m_N^4 + (8M_\pi^2 - 3q^2)m_N^2 \\
& +q^2(M_\pi^2 - q^2))m_\Delta^6 - 6m_N(8m_N^4 + (8M_\pi^2 - 11q^2)m_N^2 + 3q^4 \\
& -5M_\pi^2q^2)m_\Delta^5 + (3q^6 - 8M_\pi^2q^4 + 6M_\pi^4q^2 + 2m_N^4(8M_\pi^2 + 5q^2) \\
& +4m_N^2(12M_\pi^4 - 8q^2M_\pi^2 - q^4))m_\Delta^4 + 2m_N(24m_N^6 + (16M_\pi^2 \\
& -35q^2)m_N^4 + (24M_\pi^4 - 30q^2M_\pi^2 + 17q^4)m_N^2 - 3q^6 \\
& +11M_\pi^2q^4 - 15M_\pi^4q^2)m_\Delta^3 + 4(m_N^2 - M_\pi^2)(4m_N^6 + (4M_\pi^2 \\
& -7q^2)m_N^4 + (8M_\pi^4 - 6q^2M_\pi^2 + 3q^4)m_N^2 + M_\pi^2q^2(M_\pi^2 \\
& -q^2))m_\Delta^2 - 2m_N(m_N^2 - M_\pi^2)^2(8m_N^4 + (8M_\pi^2 - 7q^2)m_N^2 \\
& +2q^4 - 5M_\pi^2q^2)m_\Delta - (m_N^2 - M_\pi^2)^3(8m_N^4 + (8M_\pi^2 \\
& -5q^2)m_N^2 + M_\pi^2q^2))) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{36} = & -\frac{g_\Delta^2(5\tau_3 + 3)}{10368F_\pi^2m_\Delta^4m_N^3\pi^2(q^2 - 4m_N^2)^2}(m_N^2(4m_N^2 - q^2) \\
& \times (-3m_N(20m_N^2 + q^2)m_\Delta^6 - 4(120m_N^4 - 37q^2m_N^2 + q^4)m_\Delta^5 \\
& +m_N(-240m_N^4 + 4(24M_\pi^2 + 25q^2)m_N^2 - 13q^4 + 12M_\pi^2q^2)m_\Delta^4 \\
& +4m_N^2(48m_N^4 - (72M_\pi^2 + 35q^2)m_N^2 + 2q^4 \\
& +21M_\pi^2q^2)m_\Delta^3 + m_N(120m_N^6 - 8(36M_\pi^2 + 7q^2)m_N^4 \\
& -2(18M_\pi^4 + 38q^2M_\pi^2 + 19q^4)m_N^2 + 13q^6 + 28M_\pi^2q^4 - 9M_\pi^4q^2)m_\Delta^2 \\
& +4q^2(10m_N^6 - (24M_\pi^2 + q^2)m_N^4 + (6M_\pi^2q^2 - 10M_\pi^4)m_N^2 \\
& +M_\pi^4q^2)m_\Delta + m_Nq^2(16m_N^6 + 6q^2m_N^4 - 4(7M_\pi^4 \\
& +q^2M_\pi^2 - q^4)m_N^2 + q^2(M_\pi^4 + 4q^2M_\pi^2 - 2q^4))) \\
& +A_0(m_\Delta^2)(-2(4m_N^2 - q^2)(36m_N^3m_\Delta^6 + (4q^4 - 22m_N^2q^2)m_\Delta^5 \\
& -3(4m_N^5 + (24M_\pi^2 + 13q^2)m_N^3 - 4q^4m_N)m_\Delta^4 \\
& +(-240m_N^6 + 74q^2m_N^4 + (4q^4 + 26M_\pi^2q^2)m_N^2 - 8M_\pi^2q^4)m_\Delta^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2m_N ( -78m_N^6 + 60M_\pi^2 m_N^4 + ( 18M_\pi^4 + 26q^2 M_\pi^2 + 3q^4 ) m_N^2 \\
& -8M_\pi^2 q^4 ) m_\Delta^2 - 4q^2 ( 3m_N^6 - 16M_\pi^2 m_N^4 + ( M_\pi^4 + 4q^2 M_\pi^2 ) m_N^2 \\
& -M_\pi^4 q^2 ) m_\Delta + m_N q^2 ( -20m_N^6 + 4( 6M_\pi^2 - q^2 ) m_N^4 \\
& + ( -4M_\pi^4 - 12q^2 M_\pi^2 + 3q^4 ) m_N^2 + 4M_\pi^4 q^2 ) ) \\
& +A_0(M_\pi^2) ( 2( 4m_N^2 - q^2 ) ( ( 4(m_\Delta + m_N)M_\pi^4 - ( 8m_\Delta^3 + 16m_N m_\Delta^2 \\
& +20m_N^2 m_\Delta + 15m_N^3 ) M_\pi^2 + 2(m_\Delta + m_N)^2 ( 2m_\Delta^3 \\
& +2m_N m_\Delta^2 - 2m_N^2 m_\Delta + m_N^3 ) ) q^4 + m_N^2 ( -4(m_\Delta + m_N)M_\pi^4 \\
& + ( 26m_\Delta^3 + 55m_N m_\Delta^2 + 80m_N^2 m_\Delta + 36m_N^3 ) M_\pi^2 \\
& -2(m_\Delta + m_N)^2 ( 11m_\Delta^3 - m_N m_\Delta^2 + 10m_N^2 m_\Delta - 2m_N^3 ) ) q^2 \\
& +36m_\Delta^2 m_N^3 ( m_\Delta^4 - 2M_\pi^2 m_\Delta^2 + 4m_N^3 m_\Delta + 3m_N^4 + M_\pi^4 + 3m_N^2 M_\pi^2 ) ) ) \\
& +B_0(m_N^2, m_\Delta^2, M_\pi^2) ( -8(m_\Delta + m_N)(m_\Delta + m_N - M_\pi)^2 \\
& \times (m_\Delta + m_N + M_\pi)^2 ( (m_\Delta - m_N)^2 - M_\pi^2 ) q^6 \\
& +4m_N^2 ( - (10m_\Delta + 13m_N)M_\pi^6 \\
& + ( 39m_\Delta^3 + 59m_N m_\Delta^2 + 44m_N^2 m_\Delta + 33m_N^3 ) M_\pi^4 \\
& - (m_\Delta + m_N) ( 48m_\Delta^4 + 58m_N m_\Delta^3 + 44m_N^2 m_\Delta^2 + 43m_N^3 m_\Delta \\
& +27m_N^4 ) M_\pi^2 + (m_\Delta - m_N)(m_\Delta + m_N)^3 ( 19m_\Delta^3 + 22m_N m_\Delta^2 \\
& -22m_N^2 m_\Delta - 7m_N^3 ) ) q^4 - 4m_N^3 ( ( -9m_\Delta^2 + 28m_N m_\Delta \\
& +16m_N^2 ) M_\pi^6 + m_\Delta ( 27m_\Delta^3 + 42m_N m_\Delta^2 + 121m_N^2 m_\Delta \\
& +52m_N^3 ) M_\pi^4 - (m_\Delta + m_N) ( 27m_\Delta^5 + 141m_N m_\Delta^4 \\
& +149m_N^2 m_\Delta^3 - 77m_N^3 m_\Delta^2 + 44m_N^4 m_\Delta + 48m_N^5 ) M_\pi^2 \\
& + (m_\Delta - m_N)(m_\Delta + m_N)^3 ( 9m_\Delta^4 + 80m_N m_\Delta^3 - 7m_N^2 m_\Delta^2 \\
& +52m_N^3 m_\Delta - 32m_N^4 ) ) q^2 + 576m_\Delta^2 m_N^5 (m_\Delta + m_N \\
& -M_\pi)(m_\Delta + m_N + M_\pi) ( m_\Delta^4 - m_N m_\Delta^3 + ( m_N^2 - 2M_\pi^2 ) m_\Delta^2 \\
& +m_N ( m_N^2 + M_\pi^2 ) m_\Delta - 2m_N^4 + M_\pi^4 + m_N^2 M_\pi^2 ) ) \\
& +B_0(q^2, M_\pi^2, M_\pi^2) ( m_N^3 ( -3q^{10} + ( 4M_\pi^2 + (m_\Delta + 2m_N)(m_\Delta \\
& +10m_N) ) q^8 + 2( 22m_\Delta^4 - 36m_N m_\Delta^3 - 17m_N^2 m_\Delta^2 - 42m_N^3 m_\Delta \\
& -11m_N^4 - 3M_\pi^4 + 2( 5m_\Delta^2 - 3m_N m_\Delta - 5m_N^2 ) M_\pi^2 ) q^6 \\
& -2( 33m_\Delta^6 - 6m_N m_\Delta^5 + 128m_N^2 m_\Delta^4 - 222m_N^3 m_\Delta^3 - 43m_N^4 m_\Delta^2 \\
& -72m_N^5 m_\Delta - 10m_N^6 - 6M_\pi^6 - 3( 7m_\Delta^2 + 24m_N m_\Delta \\
& +10m_N^2 ) M_\pi^4 - 2( 3m_\Delta^4 + 57m_N m_\Delta^3 - 4m_N^2 m_\Delta^2 - 24m_N^3 m_\Delta \\
& -23m_N^4 ) M_\pi^2 ) q^4 - 4( 9m_\Delta^8 - 54m_N m_\Delta^7 - 27( 3m_N^2 \\
& +M_\pi^2 ) m_\Delta^6 + 72m_N ( 2m_N^2 + M_\pi^2 ) m_\Delta^5 + ( -149m_N^4 \\
& +162M_\pi^2 m_N^2 + 27M_\pi^4 ) m_\Delta^4 - 6( m_N^5 - 38M_\pi^2 m_N^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3M_\pi^4 m_N m_\Delta^3 + (m_N - M_\pi)(m_N + M_\pi)(29m_N^4 \\
& + 66M_\pi^2 m_N^2 + 9M_\pi^4)m_\Delta^2 + 36m_N(m_N - M_\pi)^3(m_N + M_\pi)^3 m_\Delta \\
& + 24m_N^2(m_N - M_\pi)^3(m_N + M_\pi)^3 q^2 - 96m_\Delta^2 m_N^2(m_\Delta + m_N \\
& - M_\pi)(m_\Delta + m_N + M_\pi)(3m_\Delta^4 - 2(m_N^2 \\
& + 3M_\pi^2)m_\Delta^2 + 3(m_N - M_\pi)^2(m_N + M_\pi)^2)) \\
& + C_0(q^2, m_N^2, m_N^2, M_\pi^2, M_\pi^2, m_\Delta^2)(12m_N^3(((m_\Delta - m_N)(m_\Delta \\
& + m_N)^2 + (2m_\Delta + m_N)M_\pi^2)^2 q^6 + (M_\pi^8 \\
& + 2(2m_\Delta + m_N)(m_\Delta + 4m_N)M_\pi^6 - 2(3m_\Delta^4 - 4m_N m_\Delta^3 \\
& + 17m_N^3 m_\Delta + 11m_N^4)M_\pi^4 - 2(m_\Delta + m_N)^2(2m_\Delta^4 \\
& + 10m_N m_\Delta^3 + m_N^3 m_\Delta - 8m_N^4)M_\pi^2 + (m_\Delta \\
& - m_N)^2(m_\Delta + m_N)^4(5m_\Delta^2 - 8m_N m_\Delta - 3m_N^2))q^4 \\
& + (m_\Delta + m_N - M_\pi)(m_\Delta + m_N + M_\pi)(-(3m_\Delta^2 + 12m_N m_\Delta \\
& + 8m_N^2)M_\pi^6 + (9m_\Delta^4 - 55m_N^2 m_\Delta^2 + 20m_N^3 m_\Delta + 24m_N^4)M_\pi^4 \\
& - (9m_\Delta^6 - 36m_N m_\Delta^5 - 50m_N^2 m_\Delta^4 + 16m_N^3 m_\Delta^3 - 55m_N^4 m_\Delta^2 \\
& + 4m_N^5 m_\Delta + 24m_N^6)M_\pi^2 + (m_\Delta^2 - m_N^2)^2(3m_\Delta^4 \\
& - 24m_N m_\Delta^3 + 19m_N^2 m_\Delta^2 - 4m_N^3 m_\Delta + 8m_N^4))q^2 \\
& + 24m_\Delta^2 m_N^2(m_\Delta - m_N - M_\pi)(m_\Delta + m_N - M_\pi)^2 \\
& \times (m_\Delta - m_N + M_\pi)(m_\Delta + m_N + M_\pi)^2 (m_\Delta^2 + m_N^2 - M_\pi^2))) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{37+38} & = \frac{g_\Delta^2 \tau_3}{864 F_\pi^2 m_\Delta^2 m_N^2 \pi^2} ( m_N^2 ( 3m_\Delta^4 - 12m_N m_\Delta^3 - 4m_N^2 m_\Delta^2 \\
& + 4m_N^3 m_\Delta + 2m_N^4 - 3M_\pi^4 - 4m_N(3m_\Delta + 2m_N)M_\pi^2 ) \\
& + 6A_0(m_\Delta^2) ( m_\Delta^4 + 2m_N m_\Delta^3 - ( m_N^2 + 2M_\pi^2 ) m_\Delta^2 \\
& + 2 ( m_N^3 - m_N M_\pi^2 ) m_\Delta + ( m_N^2 - M_\pi^2 )^2 ) \\
& + 6A_0(M_\pi^2) ( - m_\Delta^4 - 2m_N m_\Delta^3 + 2M_\pi^2 m_\Delta^2 \\
& + 2m_N ( m_N^2 + M_\pi^2 ) m_\Delta + m_N^4 - M_\pi^4 + 3m_N^2 M_\pi^2 ) \\
& - 6B_0(m_N^2, m_\Delta^2, M_\pi^2)(m_\Delta + m_N - M_\pi)^2(m_\Delta + m_N + M_\pi)^2 \\
& \times ((m_\Delta - m_N)^2 - M_\pi^2) ).
\end{aligned}$$

Die nichtrenormierten Beiträge zum Pauli-Formfaktor  $F_2$  lauten:

$$\begin{aligned}
F_2^{35} = & \frac{g_\Delta^2 M_\rho^2 \tau_3}{1296 F_\pi^2 m_\Delta^2 m_N^2 \pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2 (q^2 - M_\rho^2)} (136m_N^{10} \\
& - 208m_\Delta m_N^9 - 656m_\Delta^2 m_N^8 - 400M_\pi^2 m_N^8 - 34q^2 m_N^8 - 48m_\Delta^3 m_N^7 \\
& - 144m_\Delta M_\pi^2 m_N^7 + 148m_\Delta q^2 m_N^7 - 24m_\Delta^4 m_N^6 + 168M_\pi^4 m_N^6 \\
& - 4q^4 m_N^6 - 144m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^6 + 436m_\Delta^2 q^2 m_N^6 + 164M_\pi^2 q^2 m_N^6 \\
& - 44m_\Delta q^4 m_N^5 - 12m_\Delta^3 q^2 m_N^5 + 108m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^5 + q^6 m_N^4 \\
& - 68m_\Delta^2 q^4 m_N^4 - 16M_\pi^2 q^4 m_N^4 + 30m_\Delta^4 q^2 m_N^4 - 66M_\pi^4 q^2 m_N^4 \\
& + 36m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^4 + 5m_\Delta q^6 m_N^3 + 6m_\Delta^3 q^4 m_N^3 - 18m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^3 \\
& - 6m_\Delta^4 q^4 m_N^2 + 6M_\pi^4 q^4 m_N^2 + 6(4(-11m_\Delta^4 - 10m_N m_\Delta^3) \\
& + 2(m_N^2 + 11M_\pi^2)m_\Delta^2 + 2(m_N^3 + 5M_\pi^2 m_N)m_\Delta + m_N^4 \\
& - 11M_\pi^4 + 10m_N^2 M_\pi^2)m_N^4 + (19m_\Delta^4 + 26m_N m_\Delta^3 \\
& - 2(11m_N^2 + 19M_\pi^2)m_\Delta^2 + 2(m_N^3 - 13m_N M_\pi^2)m_\Delta \\
& - 5m_N^4 + 19M_\pi^4 - 14m_N^2 M_\pi^2)q^2 m_N^2 + (-2m_\Delta^4 - 4m_N m_\Delta^3 \\
& + (5m_N^2 + 4M_\pi^2)m_\Delta^2 - (m_N^3 - 4m_N M_\pi^2)m_\Delta + m_N^4 \\
& - 2M_\pi^4 + m_N^2 M_\pi^2)q^4) A_0(m_\Delta^2) + 6(4(11m_\Delta^4 + 10m_N m_\Delta^3 \\
& + (6m_N^2 - 22M_\pi^2)m_\Delta^2 + 2(3m_N^3 - 5m_N M_\pi^2)m_\Delta + 3m_N^4 + 11M_\pi^4 \\
& - 18m_N^2 M_\pi^2)m_N^4 + (-19m_\Delta^4 - 26m_N m_\Delta^3 + (6m_N^2 + 38M_\pi^2)m_\Delta^2 \\
& + (26m_N M_\pi^2 - 18m_N^3)m_\Delta - 3m_N^4 - 19M_\pi^4 + 30m_N^2 M_\pi^2)q^2 m_N^2 \\
& + (2m_\Delta^4 + 4m_N m_\Delta^3 - (3m_N^2 + 4M_\pi^2)m_\Delta^2 + (3m_N^3 - 4m_N M_\pi^2)m_\Delta \\
& + 2M_\pi^4 - 3m_N^2 M_\pi^2)q^4) A_0(M_\pi^2) + (-60m_N^{10} - 264m_\Delta m_N^9 \\
& - 228m_\Delta^2 m_N^8 - 252M_\pi^2 m_N^8 + 66q^2 m_N^8 - 336m_\Delta^3 m_N^7 - 48m_\Delta M_\pi^2 m_N^7 \\
& + 132m_\Delta q^2 m_N^7 - 372m_\Delta^4 m_N^6 + 684M_\pi^4 m_N^6 - 6q^4 m_N^6 - 312m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^6 \\
& + 150m_\Delta^2 q^2 m_N^6 - 18M_\pi^2 q^2 m_N^6 + 312m_\Delta^5 m_N^5 + 312m_\Delta M_\pi^4 m_N^5 \\
& - 30m_\Delta q^4 m_N^5 - 624m_\Delta^3 M_\pi^2 m_N^5 + 384m_\Delta^3 q^2 m_N^5 + 96m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^5 \\
& + 372m_\Delta^6 m_N^4 - 372M_\pi^6 m_N^4 + 1116m_\Delta^2 M_\pi^4 m_N^4 + 24m_\Delta^2 q^4 m_N^4 \\
& - 1116m_\Delta^4 M_\pi^2 m_N^4 + 402m_\Delta^4 q^2 m_N^4 - 162M_\pi^4 q^2 m_N^4 - 240m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^4 \\
& - 102m_\Delta^3 q^4 m_N^3 + 6m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^3 - 228m_\Delta^5 q^2 m_N^3 - 228m_\Delta M_\pi^4 q^2 m_N^3 \\
& + 456m_\Delta^3 M_\pi^2 q^2 m_N^3 - 30m_\Delta^4 q^4 m_N^2 + 18M_\pi^4 q^4 m_N^2 + 12m_\Delta^2 M_\pi^2 q^4 m_N^2 \\
& - 114m_\Delta^6 q^2 m_N^2 + 114M_\pi^6 q^2 m_N^2 - 342m_\Delta^2 M_\pi^4 q^2 m_N^2 + 342m_\Delta^4 M_\pi^2 q^2 m_N^2 \\
& + 24m_\Delta^5 q^4 m_N + 24m_\Delta M_\pi^4 q^4 m_N - 48m_\Delta^3 M_\pi^2 q^4 m_N + 12m_\Delta^6 q^4 \\
& - 12M_\pi^6 q^4 + 36m_\Delta^2 M_\pi^4 q^4 - 36m_\Delta^4 M_\pi^2 q^4) B_0(m_N^2, m_\Delta^2, M_\pi^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ( - 36m_N^{10} - 216m_\Delta m_N^9 - 180m_\Delta^2 m_N^8 - 12M_\pi^2 m_N^8 + 30q^2 m_N^8 \\
& + 288m_\Delta^3 m_N^7 - 96m_\Delta M_\pi^2 m_N^7 + 204m_\Delta q^2 m_N^7 + 324m_\Delta^4 m_N^6 \\
& - 252M_\pi^4 m_N^6 - 24q^4 m_N^6 - 72m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^6 + 72m_\Delta^2 q^2 m_N^6 \\
& + 132M_\pi^2 q^2 m_N^6 - 72m_\Delta^5 m_N^5 - 396m_\Delta^3 q^2 m_N^5 - 324m_\Delta^2 M_\pi^4 m_N^4 \\
& - 72m_\Delta M_\pi^4 m_N^5 - 48m_\Delta q^4 m_N^5 + 144m_\Delta^3 M_\pi^2 m_N^5 \\
& + 12m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^5 - 108m_\Delta^6 m_N^4 + 108M_\pi^6 m_N^4 + 3q^6 m_N^4 \\
& - 54m_\Delta^2 q^4 m_N^4 - 12M_\pi^2 q^4 m_N^4 + 324m_\Delta^4 M_\pi^2 m_N^4 - 270m_\Delta^4 q^2 m_N^4 \\
& - 18M_\pi^4 q^2 m_N^4 + 288m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^4 + 6m_\Delta q^6 m_N^3 + 108m_\Delta^3 q^4 m_N^3 \\
& - 24m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^3 + 72m_\Delta^5 q^2 m_N^3 + 72m_\Delta M_\pi^4 q^2 m_N^3 \\
& - 144m_\Delta^3 M_\pi^2 q^2 m_N^3 ) B_0 ( q^2, M_\pi^2, M_\pi^2 ) + ( 36m_N^{12} + 216m_\Delta m_N^{11} \\
& + 144m_\Delta^2 m_N^{10} - 36q^2 m_N^{10} - 504m_\Delta^3 m_N^9 - 360m_\Delta M_\pi^2 m_N^9 \\
& - 144m_\Delta q^2 m_N^9 - 504m_\Delta^4 m_N^8 - 216M_\pi^4 m_N^8 - 432m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^8 \\
& + 36m_\Delta^2 q^2 m_N^8 + 108M_\pi^2 q^2 m_N^8 + 360m_\Delta^5 m_N^7 + 72m_\Delta M_\pi^4 m_N^7 \\
& + 36m_\Delta q^4 m_N^7 - 432m_\Delta^3 M_\pi^2 m_N^7 + 720m_\Delta^3 q^2 m_N^7 + 216m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^7 \\
& + 432m_\Delta^6 m_N^6 + 288M_\pi^6 m_N^6 - 144m_\Delta^2 M_\pi^4 m_N^6 - 72m_\Delta^2 q^4 m_N^6 \\
& - 576m_\Delta^4 M_\pi^2 m_N^6 + 468m_\Delta^4 q^2 m_N^6 - 108M_\pi^4 q^2 m_N^6 + 360m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^6 \\
& - 72m_\Delta^7 m_N^5 + 72m_\Delta M_\pi^6 m_N^5 - 216m_\Delta^3 M_\pi^4 m_N^5 - 324m_\Delta^3 q^4 m_N^5 \\
& - 72m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^5 + 216m_\Delta^5 M_\pi^2 m_N^5 - 504m_\Delta^5 q^2 m_N^5 \\
& - 108m_\Delta^8 m_N^4 - 108M_\pi^8 m_N^4 + 432m_\Delta^2 M_\pi^6 m_N^4 - 648m_\Delta^4 M_\pi^4 m_N^4 \\
& - 180m_\Delta^4 q^4 m_N^4 + 72m_\Delta^2 M_\pi^2 q^4 m_N^4 + 432m_\Delta^6 M_\pi^2 m_N^4 \\
& - 324m_\Delta^6 q^2 m_N^4 + 36M_\pi^6 q^2 m_N^4 - 396m_\Delta^2 M_\pi^4 q^2 m_N^4 \\
& + 684m_\Delta^4 M_\pi^2 q^2 m_N^4 + 54m_\Delta^3 q^6 m_N^3 + 144m_\Delta^5 q^4 m_N^3 \\
& + 36m_\Delta M_\pi^4 q^4 m_N^3 - 180m_\Delta^3 M_\pi^2 q^4 m_N^3 + 72m_\Delta^7 q^2 m_N^3 \\
& - 72m_\Delta M_\pi^6 q^2 m_N^3 + 216m_\Delta^3 M_\pi^4 q^2 m_N^3 + 504m_\Delta^3 M_\pi^2 q^2 m_N^5 \\
& - 216m_\Delta^5 M_\pi^2 q^2 m_N^3 ) C_0 ( q^2, m_N^2, m_N^2, M_\pi^2, M_\pi^2, m_\Delta^2 ) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{36} = & \frac{g_\Delta^2(5\tau_3 + 3)}{2592F_\pi^2 m_\Delta^4 m_N \pi^2 (q^2 - 4m_N^2)^2} ( - 64m_N^{11} - 160m_\Delta m_N^{10} \\
& - 104m_\Delta^2 m_N^9 + 256M_\pi^2 m_N^9 + 8q^2 m_N^9 + 176m_\Delta^3 m_N^8 \\
& + 256m_\Delta M_\pi^2 m_N^8 + 40m_\Delta q^2 m_N^8 + 512m_\Delta^4 m_N^7 - 16M_\pi^4 m_N^7 \\
& + 2q^4 m_N^7 - 80m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^7 + 2m_\Delta^2 q^2 m_N^7 - 80M_\pi^2 q^2 m_N^7 \\
& - 368m_\Delta^5 m_N^6 - 32m_\Delta M_\pi^4 m_N^6 - 16m_\Delta q^4 m_N^6 - 176m_\Delta^3 M_\pi^2 m_N^6 \\
& - 20m_\Delta^3 q^2 m_N^6 - 64m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^6 - 72m_\Delta^6 m_N^5 - 72m_\Delta^2 M_\pi^4 m_N^5 \\
& + 26m_\Delta^2 q^4 m_N^5 + 4M_\pi^2 q^4 m_N^5 + 144m_\Delta^4 M_\pi^2 m_N^5 - 268m_\Delta^4 q^2 m_N^5 \\
& - 16M_\pi^4 q^2 m_N^5 + 4m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^5 + 12m_\Delta q^6 m_N^4 - 38m_\Delta^3 q^4 m_N^4 \\
& - 16m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^4 + 196m_\Delta^5 q^2 m_N^4 - 8m_\Delta M_\pi^4 q^2 m_N^4 \\
& + 100m_\Delta^3 M_\pi^2 q^2 m_N^4 - 5m_\Delta^2 q^6 m_N^3 + 35m_\Delta^4 q^4 m_N^3 + 5M_\pi^4 q^4 m_N^3 \\
& + 4m_\Delta^2 M_\pi^2 q^4 m_N^3 + 18m_\Delta^6 q^2 m_N^3 + 18m_\Delta^2 M_\pi^4 q^2 m_N^3 \\
& - 36m_\Delta^4 M_\pi^2 q^2 m_N^3 - 2m_\Delta q^8 m_N^2 + 8m_\Delta^3 q^6 m_N^2 + 4m_\Delta M_\pi^2 q^6 m_N^2 \\
& - 26m_\Delta^5 q^4 m_N^2 + 4m_\Delta M_\pi^4 q^4 m_N^2 - 14m_\Delta^3 M_\pi^2 q^4 m_N^2 \\
& + 2 ( m_N^2 (m_N - 6m_\Delta) q^6 + 2 ( m_\Delta^5 + 4m_N m_\Delta^4 + 2 ( 8m_N^2 - M_\pi^2 ) m_\Delta^3 \\
& + 3 ( m_N^3 - 2m_N M_\pi^2 ) m_\Delta^2 + ( 24m_N^4 - M_\pi^2 m_N^2 + M_\pi^4 ) m_\Delta \\
& - 2m_N ( m_\Delta^4 + 2M_\pi^2 m_N^2 - M_\pi^4 ) ) q^4 - m_N ( - 9m_\Delta^6 + 22m_N m_\Delta^5 \\
& + 2 ( 29m_N^2 + 9M_\pi^2 ) m_\Delta^4 + ( 226m_N^3 - 26m_N M_\pi^2 ) m_\Delta^3 \\
& + 3 ( 21m_N^4 - 38M_\pi^2 m_N^2 - 3M_\pi^4 ) m_\Delta^2 + 4m_N ( 27m_N^4 \\
& - 4M_\pi^2 m_N^2 + M_\pi^4 ) m_\Delta + 4 ( m_N^6 - 10M_\pi^2 m_N^4 + 5M_\pi^4 m_N^2 ) ) q^2 \\
& + 4m_N^3 ( - 9m_\Delta^6 + 14m_N m_\Delta^5 + 2 ( 13m_N^2 + 9M_\pi^2 ) m_\Delta^4 \\
& + 2 ( 49m_N^3 - 5m_N M_\pi^2 ) m_\Delta^3 + ( 39m_N^4 - 66M_\pi^2 m_N^2 - 9M_\pi^4 ) m_\Delta^2 \\
& + 4 ( 3m_N^5 - 2M_\pi^2 m_N^3 - M_\pi^4 m_N ) m_\Delta + 4 ( m_N^3 - m_N M_\pi^2 )^2 ) \\
& \times A_0 ( m_\Delta^2 ) + 2 ( ( - 2m_\Delta^5 - 8m_N m_\Delta^4 - 2 ( m_N^2 - 2M_\pi^2 ) m_\Delta^3 \\
& + 2 ( 5m_N^3 + 6M_\pi^2 m_N ) m_\Delta^2 + 2 ( 2m_N^4 + M_\pi^2 m_N^2 - M_\pi^4 ) m_\Delta \\
& - 2m_N^5 - 4m_N M_\pi^4 + 9m_N^3 M_\pi^2 ) q^4 + m_N ( - 9m_\Delta^6 + 22m_N m_\Delta^5 \\
& + 2 ( 29m_N^2 + 9M_\pi^2 ) m_\Delta^4 - 2 ( 7m_N^3 + 13M_\pi^2 m_N ) m_\Delta^3 \\
& - ( 65m_N^4 + 114M_\pi^2 m_N^2 + 9M_\pi^4 ) m_\Delta^2 - 4 ( 5m_N^5 + 4M_\pi^2 m_N^3 \\
& - M_\pi^4 m_N ) m_\Delta + 4 ( m_N^6 - 12M_\pi^2 m_N^4 + 5M_\pi^4 m_N^2 ) ) q^2 \\
& + 4m_N^3 ( 9m_\Delta^6 - 14m_N m_\Delta^5 - 2 ( 13m_N^2 + 9M_\pi^2 ) m_\Delta^4 \\
& + 2 ( 11m_N^3 + 5M_\pi^2 m_N ) m_\Delta^3 + ( 25m_N^4 + 66M_\pi^2 m_N^2 + 9M_\pi^4 ) m_\Delta^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4m_N ( m_N^2 + M_\pi^2 )^2 m_\Delta + 4 ( m_N^6 + 3M_\pi^2 m_N^4 \\
& - M_\pi^4 m_N^2 ) ) A_0 ( M_\pi^2 ) + ( - 32m_N^{11} - 80m_\Delta m_N^{10} \\
& - 276m_\Delta^2 m_N^9 + 96M_\pi^2 m_N^9 + 4q^2 m_N^9 - 72m_\Delta^3 m_N^8 + 80m_\Delta M_\pi^2 m_N^8 \\
& + 136m_\Delta q^2 m_N^8 + 588m_\Delta^4 m_N^7 - 96M_\pi^4 m_N^7 - 8q^4 m_N^7 + 692m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^7 \\
& + 150m_\Delta^2 q^2 m_N^7 - 84M_\pi^2 q^2 m_N^7 + 144m_\Delta^5 m_N^6 + 80m_\Delta M_\pi^4 m_N^6 \\
& - 20m_\Delta q^4 m_N^6 + 928m_\Delta^3 M_\pi^2 m_N^6 - 252m_\Delta^3 q^2 m_N^6 - 160m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^6 \\
& - 460m_\Delta^6 m_N^5 + 32M_\pi^6 m_N^5 - 236m_\Delta^2 M_\pi^4 m_N^5 + 24M_\pi^2 q^4 m_N^5 \\
& + 664m_\Delta^4 M_\pi^2 m_N^5 - 306m_\Delta^4 q^2 m_N^5 + 156M_\pi^4 q^2 m_N^5 - 382m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^5 \\
& + 8m_\Delta^7 m_N^4 - 80m_\Delta M_\pi^6 m_N^4 + 168m_\Delta^3 M_\pi^4 m_N^4 + 36m_\Delta^3 q^4 m_N^4 \\
& + 44m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^4 - 96m_\Delta^5 M_\pi^2 m_N^4 + 120m_\Delta^5 q^2 m_N^4 + 56m_\Delta M_\pi^4 q^2 m_N^4 \\
& - 464m_\Delta^3 M_\pi^2 q^2 m_N^4 + 180m_\Delta^8 m_N^3 - 180m_\Delta^2 M_\pi^6 m_N^3 + 540m_\Delta^4 M_\pi^4 m_N^3 \\
& + 24m_\Delta^4 q^4 m_N^3 - 24M_\pi^4 q^4 m_N^3 + 32m_\Delta^2 M_\pi^2 q^4 m_N^3 - 540m_\Delta^6 M_\pi^2 m_N^3 \\
& + 170m_\Delta^6 q^2 m_N^3 - 76M_\pi^6 q^2 m_N^3 + 142m_\Delta^2 M_\pi^4 q^2 m_N^3 - 236m_\Delta^4 M_\pi^2 q^2 m_N^3 \\
& - 12m_\Delta^5 q^4 m_N^2 - 28m_\Delta M_\pi^4 q^4 m_N^2 + 40m_\Delta^3 M_\pi^2 q^4 m_N^2 - 4m_\Delta^7 q^2 m_N^2 \\
& - 32m_\Delta M_\pi^6 q^2 m_N^2 + 60m_\Delta^3 M_\pi^4 q^2 m_N^2 - 24m_\Delta^5 M_\pi^2 q^2 m_N^2 \\
& - 16m_\Delta^6 q^4 m_N + 8M_\pi^6 q^4 m_N - 32m_\Delta^2 M_\pi^4 q^4 m_N + 40m_\Delta^4 M_\pi^2 q^4 m_N \\
& - 18m_\Delta^8 q^2 m_N + 18m_\Delta^2 M_\pi^6 q^2 m_N - 54m_\Delta^4 M_\pi^4 q^2 m_N + 54m_\Delta^6 M_\pi^2 q^2 m_N \\
& - 4m_\Delta^7 q^4 + 4m_\Delta M_\pi^6 q^4 - 12m_\Delta^3 M_\pi^4 q^4 + 12m_\Delta^5 M_\pi^2 q^4 ) B_0(m_N^2, m_\Delta^2, M_\pi^2) \\
& + ( - 48m_\Delta m_N^{10} - 108m_\Delta^2 m_N^9 - 116m_\Delta^3 M_\pi^2 q^2 m_N^4 + 144m_\Delta M_\pi^2 m_N^8 \\
& + 88m_\Delta q^2 m_N^8 + 252m_\Delta^4 m_N^7 - 10q^4 m_N^7 + 324m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^7 \\
& + 12M_\pi^2 q^2 m_N^7 + 224m_\Delta^5 m_N^6 - 144m_\Delta M_\pi^4 m_N^6 + 28m_\Delta q^4 m_N^6 \\
& + 112m_\Delta^3 M_\pi^2 m_N^6 - 300m_\Delta^3 q^2 m_N^6 - 88m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^6 + 252m_\Delta^6 m_N^5 \\
& + 8q^6 m_N^5 - 324m_\Delta^2 M_\pi^4 m_N^5 + 10m_\Delta^2 q^4 m_N^5 - 12M_\pi^2 q^4 m_N^5 \\
& + 72m_\Delta^4 M_\pi^2 m_N^5 - 144m_\Delta^4 q^2 m_N^5 - 60M_\pi^4 q^2 m_N^5 - 144m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^5 \\
& - 120m_\Delta^7 m_N^4 + 48m_\Delta M_\pi^6 m_N^4 - 38m_\Delta q^6 m_N^4 - 216m_\Delta^3 M_\pi^4 m_N^4 \\
& + 228m_\Delta^3 q^4 m_N^4 + 44m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^4 + 288m_\Delta^5 M_\pi^2 m_N^4 - 244m_\Delta^5 q^2 m_N^4 \\
& - 24m_\Delta M_\pi^4 q^2 m_N^4 + 104m_\Delta^3 m_N^8 - q^8 m_N^3 - 14m_\Delta^2 q^2 m_N^7 + 12q^2 m_N^9 \\
& - 108m_\Delta^8 m_N^3 + 108m_\Delta^2 M_\pi^6 m_N^3 - 5m_\Delta^2 q^6 m_N^3 - 324m_\Delta^4 M_\pi^4 m_N^3 \\
& + 36m_\Delta^4 q^4 m_N^3 + 6M_\pi^4 q^4 m_N^3 + 36m_\Delta^2 M_\pi^2 q^4 m_N^3 + 324m_\Delta^6 M_\pi^2 m_N^3 \\
& - 54m_\Delta^6 q^2 m_N^3 + 36M_\pi^6 q^2 m_N^3 + 126m_\Delta^2 M_\pi^4 q^2 m_N^3 - 108m_\Delta^4 M_\pi^2 q^2 m_N^3 \\
& + 6m_\Delta q^8 m_N^2 - 32m_\Delta^3 q^6 m_N^2 - 10m_\Delta M_\pi^2 q^6 m_N^2 + 20m_\Delta^5 q^4 m_N^2 \\
& + 24m_\Delta M_\pi^4 q^4 m_N^2 + 40m_\Delta^3 M_\pi^2 q^4 m_N^2 + 48m_\Delta^7 q^2 m_N^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +24m_\Delta M_\pi^6 q^2 m_N^2 - 72m_\Delta^5 M_\pi^2 q^2 m_N^2 ) B_0 ( q^2, m_\Delta^2, m_N^2 ) \\
& + ( 48m_\Delta m_N^{12} + 108m_\Delta^2 m_N^{11} - 12q^2 m_N^{11} - 120m_\Delta^3 m_N^{10} \\
& - 192m_\Delta M_\pi^2 m_N^{10} - 96m_\Delta q^2 m_N^{10} - 288m_\Delta^4 m_N^9 + 12q^4 m_N^9 \\
& - 432m_\Delta^2 M_\pi^2 m_N^9 + 216m_\Delta^5 m_N^8 + 288m_\Delta M_\pi^4 m_N^8 + 12m_\Delta q^4 m_N^8 \\
& - 24m_\Delta^3 M_\pi^2 m_N^8 + 336m_\Delta^3 q^2 m_N^8 + 216m_\Delta M_\pi^2 q^2 m_N^8 + 360m_\Delta^6 m_N^7 \\
& + 648m_\Delta^2 M_\pi^4 m_N^7 - 36m_\Delta^2 q^4 m_N^7 + 144m_\Delta^4 M_\pi^2 m_N^7 + 72m_\Delta^4 q^2 m_N^7 \\
& + 72M_\pi^4 q^2 m_N^7 + 240m_\Delta^2 M_\pi^2 q^2 m_N^7 - 264m_\Delta^7 m_N^6 - 192m_\Delta M_\pi^6 m_N^6 \\
& + 408m_\Delta^3 M_\pi^4 m_N^6 - 36m_\Delta^3 q^4 m_N^6 - 60m_\Delta M_\pi^2 q^4 m_N^6 + 48m_\Delta^5 M_\pi^2 m_N^6 \\
& - 432m_\Delta^5 q^2 m_N^6 - 120m_\Delta M_\pi^4 q^2 m_N^6 - 96m_\Delta^3 M_\pi^2 q^2 m_N^6 - 288m_\Delta^8 m_N^5 \\
& - 432m_\Delta^2 M_\pi^6 m_N^5 + 576m_\Delta^4 M_\pi^4 m_N^5 + 36m_\Delta^4 q^4 m_N^5 - 36M_\pi^4 q^4 m_N^5 \\
& - 24m_\Delta^2 M_\pi^2 q^4 m_N^5 + 144m_\Delta^6 M_\pi^2 m_N^5 - 96m_\Delta^6 q^2 m_N^5 - 96M_\pi^6 q^2 m_N^5 \\
& - 384m_\Delta^2 M_\pi^4 q^2 m_N^5 - 144m_\Delta^4 M_\pi^2 q^2 m_N^5 + 120m_\Delta^9 m_N^4 + 48m_\Delta M_\pi^8 m_N^4 \\
& - 264m_\Delta^3 M_\pi^6 m_N^4 + 504m_\Delta^5 M_\pi^4 m_N^4 + 36m_\Delta^5 q^4 m_N^4 + 12m_\Delta M_\pi^4 q^4 m_N^4 \\
& + 84m_\Delta^3 M_\pi^2 q^4 m_N^4 - 408m_\Delta^7 M_\pi^2 m_N^4 + 240m_\Delta^7 q^2 m_N^4 - 24m_\Delta M_\pi^6 q^2 m_N^4 \\
& - 216m_\Delta^3 M_\pi^4 q^2 m_N^4 + 108m_\Delta^{10} m_N^3 + 108m_\Delta^2 M_\pi^8 m_N^3 - 432m_\Delta^4 M_\pi^6 m_N^3 \\
& + 648m_\Delta^6 M_\pi^4 m_N^3 - 12m_\Delta^6 q^4 m_N^3 + 24M_\pi^6 q^4 m_N^3 + 96m_\Delta^2 M_\pi^4 q^4 m_N^3 \\
& - 432m_\Delta^8 M_\pi^2 m_N^3 + 36m_\Delta^8 q^2 m_N^3 + 36M_\pi^8 q^2 m_N^3 + 144m_\Delta^2 M_\pi^6 q^2 m_N^3 \\
& - 360m_\Delta^4 M_\pi^4 q^2 m_N^3 + 144m_\Delta^6 M_\pi^2 q^2 m_N^3 - 12m_\Delta^7 q^4 m_N^2 \\
& + 36m_\Delta M_\pi^6 q^4 m_N^2 + 24m_\Delta^3 M_\pi^4 q^4 m_N^2 - 48m_\Delta^5 M_\pi^2 q^4 m_N^2 - 48m_\Delta^9 q^2 m_N^2 \\
& + 24m_\Delta M_\pi^8 q^2 m_N^2 - 24m_\Delta^3 M_\pi^6 q^2 m_N^2 - 72m_\Delta^5 M_\pi^4 q^2 m_N^2 \\
& + 120m_\Delta^7 M_\pi^2 q^2 m_N^2 ) C_0 ( m_N^2, q^2, m_N^2, M_\pi^2, m_\Delta^2, m_\Delta^2 ) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{37+38} &= \frac{g_\Delta^2 \tau_3}{648 F_\pi^2 m_\Delta^2 m_N^2 \pi^2} ( - m_N^6 - 2m_\Delta m_N^5 + 2m_\Delta^2 m_N^4 + 4M_\pi^2 m_N^4 \\
& + 6m_\Delta^3 m_N^3 + 6m_\Delta M_\pi^2 m_N^3 - 3m_\Delta^4 m_N^2 + 3M_\pi^4 m_N^2 - 6 ( m_\Delta^4 \\
& + 2m_N m_\Delta^3 - ( m_N^2 + 2M_\pi^2 ) m_\Delta^2 + 2 ( m_N^3 - m_N M_\pi^2 ) m_\Delta \\
& + ( m_N^2 - M_\pi^2 )^2 ) A_0 ( m_\Delta^2 ) - 6 ( - m_\Delta^4 - 2m_N m_\Delta^3 + 2M_\pi^2 m_\Delta^2 \\
& + 2m_N ( m_N^2 + M_\pi^2 ) m_\Delta + m_N^4 - M_\pi^4 + 3m_N^2 M_\pi^2 ) A_0 ( M_\pi^2 ) \\
& + ( 6m_\Delta^6 + 12m_N m_\Delta^5 - 6m_N^2 m_\Delta^4 - 18M_\pi^2 m_\Delta^4 - 24m_N^3 m_\Delta^3 \\
& - 24m_N M_\pi^2 m_\Delta^3 - 6m_\Delta^4 m_N^2 + 18M_\pi^4 m_\Delta^2 - 12m_N^2 M_\pi^2 m_\Delta^2 \\
& + 12m_N^5 m_\Delta + 12m_N M_\pi^4 m_\Delta - 24m_N^3 M_\pi^2 m_\Delta + 6m_N^6 - 6M_\pi^6 \\
& + 18m_N^2 M_\pi^4 - 18m_\Delta^4 M_\pi^2 ) B_0 ( m_N^2, m_\Delta^2, M_\pi^2 ) ) .
\end{aligned}$$

Die Abzugsterme für den Dirac-Formfaktor  $\Delta F_1^{35+36+37+38}$  heben sich genau mit denjenigen der Wellenfunktionsrenormierungskonstanten  $\Delta \Sigma'_{N_\Delta}$  weg und

sind deshalb nicht aufgeführt. Für den Pauli-Formfaktor erhält man die folgenden Abzugsterme:

$$\begin{aligned} \Delta F_2^{35} = & \frac{g_\Delta^2 M_\rho^2 \tau_3}{5184 F_\pi^2 m_\Delta^2 m_N^2 \pi^2 (M_\rho^2 - q^2)} \left( -93m_\Delta^6 - 78m_N m_\Delta^5 \right. \\ & + 99m_N^2 m_\Delta^4 + 96m_N^3 m_\Delta^3 + 221m_N^4 m_\Delta^2 + 118m_N^5 m_\Delta \\ & \left. - 19m_N^6 - 48m_N^4 (4m_\Delta^2 + 5m_N m_\Delta + m_N^2) \log(m_\Delta/\mu) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_2^{36} = & \frac{g_\Delta^2 (5\tau_3 + 3)}{2592 F_\pi^2 m_\Delta^4 m_N^2 \pi^2} \left( 18m_\Delta^8 + 8m_N m_\Delta^7 - 49m_N^2 m_\Delta^6 \right. \\ & - 28m_N^3 m_\Delta^5 + 53m_N^4 m_\Delta^4 - 17m_N^6 m_\Delta^2 - 12m_N^7 m_\Delta \\ & - 6m_N^8 + 4m_N^3 \left( -36m_\Delta^5 - 36m_N m_\Delta^4 - 4m_N^2 m_\Delta^3 \right. \\ & \left. \left. + 11m_N^3 m_\Delta^2 + 4m_N^4 m_\Delta + m_N^5 \right) \log(m_\Delta/\mu) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_2^{37+38} = & \frac{g_\Delta^2 \tau_3}{648 F_\pi^2 m_\Delta^2 m_N^2 \pi^2} \left( 6m_\Delta^6 + 12m_N m_\Delta^5 - 9m_N^2 m_\Delta^4 \right. \\ & - 18m_N^3 m_\Delta^3 - 4m_N^4 m_\Delta^2 + 10m_N^5 m_\Delta + 5m_N^6 + 12m_N^3 \\ & \left. (6m_\Delta^3 + 2m_N m_\Delta^2 - 2m_N^2 m_\Delta - m_N^3) \log(m_\Delta/\mu) \right). \end{aligned}$$

### D.3 Graphische Darstellung der Dirac- und Pauli-Formfaktoren

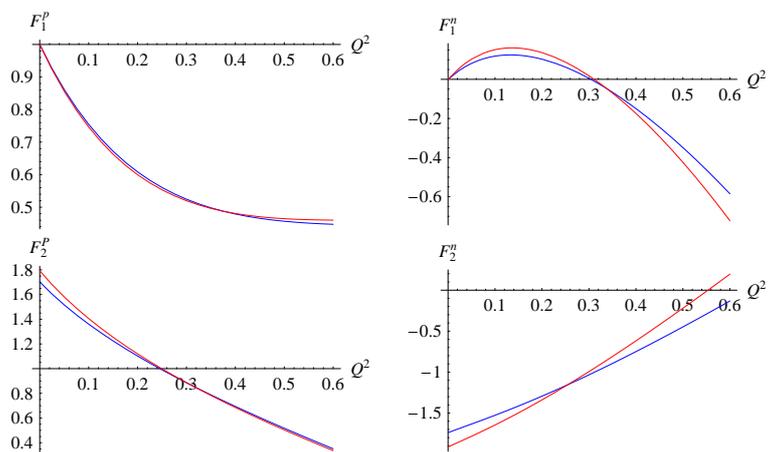


Abbildung D.1: Dirac- und Pauli-Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$ , ohne explizite Berücksichtigung der Deltaresonanz. Die rote Linie ist das Ergebnis von Methode eins, die blaue Linie von Methode zwei.

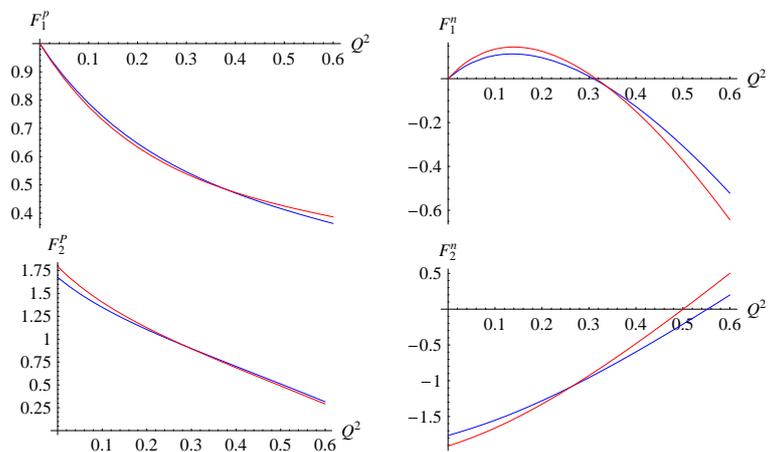


Abbildung D.2: Dirac- und Pauli-Formfaktoren des Nukleons bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^3)$ , mit expliziter Berücksichtigung der Deltaresonanz. Die rote Linie ist das Ergebnis von Methode eins, die blaue Linie von Methode zwei.

## D.4 Wellenfunktionsrenormierungskonstante

Zur Berechnung der Wellenfunktionsrenormierungskonstanten des Nukleons (siehe Gleichung (5.19)) benötigt man zunächst die Ausdrücke der Diagramme aus Abbildung 5.1. Diese lauten, ausgedrückt durch die skalaren Integrale aus Anhang D, wie folgt:

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{N\pi} &= \frac{3ig_A^2}{128F_\pi^2 p^2 \pi^2} [A_0(m_N^2) (-2m_N p^2 - (m_N^2 + p^2) \not{p}) \\
&\quad - A_0(M_\pi^2) (p^2 - m_N^2) \not{p} + B_0(p^2, m_N^2, M_\pi^2) \\
&\quad \times ((m_N^4 - (M_\pi^2 + 2p^2) m_N^2 + p^4 - M_\pi^2 p^2) \not{p} - 2m_N M_\pi^2 p^2) ], \\
-i\Sigma_{N\rho} &= \frac{3ig_0^2}{128M_\rho^2 p^2 \pi^2} [2M_\rho^2 p^2 (2m_N - \not{p}) + A_0(m_N^2) (2m_N p^2 - (m_N^2 + 2M_\rho^2 \\
&\quad + p^2) \not{p}) + B_0(p^2, m_N^2, M_\rho^2) ((m_N^4 + (M_\rho^2 - 2p^2) m_N^2 - 2M_\rho^4 \\
&\quad + p^4 + M_\rho^2 p^2) \not{p} - 6m_N M_\rho^2 p^2) + A_0(m_\rho^2) (m_N^2 + 2M_\rho^2 - p^2) \not{p} ], \\
-i\Sigma_{N\omega} &= \frac{ig_\omega^2}{128M_\omega^2 p^2 \pi^2} [2M_\omega^2 p^2 (2m_N - \not{p}) + A_0(m_N^2) (2m_N p^2 \\
&\quad - (m_N^2 + 2M_\omega^2 + p^2) \not{p}) + A_0(m_\omega^2) (m_N^2 + 2M_\omega^2 - p^2) \not{p} \\
&\quad + B_0(p^2, m_N^2, M_\omega^2) ((m_N^4 + (M_\omega^2 - 2p^2) m_N^2 - 2M_\omega^4 + p^4 \\
&\quad + M_\omega^2 p^2) \not{p} - 6m_N M_\omega^2 p^2) ], \\
-i\Sigma_{N\Delta} &= -\frac{ig_\Delta^2 \not{p}}{576F_\pi^2 m_\Delta^2 \pi^2} [3m_\Delta^4 - 12\not{p} m_\Delta^3 - 4p^2 m_\Delta^2 + 4\not{p} (p^2 - 3M_\pi^2) m_\Delta \\
&\quad - 3M_\pi^4 + 2p^4 - 8p^2 M_\pi^2 + A(m_\Delta^2) 6\not{p} (p^4 - (m_\Delta^2 + 2M_\pi^2) p^2 \\
&\quad + 2m_\Delta (m_\Delta^2 - M_\pi^2 + p^2) \not{p} + (m_\Delta^2 - M_\pi^2)^2) \\
&\quad + 6A(M_\pi^2) \not{p} (p^4 + 3M_\pi^2 p^2 + 2m_\Delta (-m_\Delta^2 + M_\pi^2 + p^2) \not{p} \\
&\quad - (m_\Delta^2 - M_\pi^2)^2) - 6B_0(p^2, m_\Delta^2, M_\pi^2) \not{p} (m_\Delta^2 - 2\not{p} m_\Delta - M_\pi^2 + p^2) \\
&\quad \times (m_\Delta^2 + 2\not{p} m_\Delta - M_\pi^2 + p^2)^2 ].
\end{aligned}$$

Um daraus die Wellenfunktionsrenormierungskonstante zu berechnen, muss man Ableitungen vom Typ  $\partial B_0[p^2, M^2, m^2]/\partial \not{p}$  bestimmen. Dazu ist es sinn-

voll, den Ausdruck  $\frac{\partial}{\partial \not{p}}$  folgendermaßen umzuschreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \not{p}} &= 2\not{p} \frac{\partial}{\partial p^2} \\ &= 2\not{p} \frac{1}{2p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu}.\end{aligned}$$

Für die gesuchte Ableitung erhält man somit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_0(p^2, M^2, m^2)}{\partial \not{p}} &= \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(-16 i \pi^2)}{[k^2 - M^2] [(p+k)^2 - m^2]} \\ &= \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(-16 i \pi^2) (-2(p+k)^\mu)}{[k^2 - M^2] [(p+k)^2 - m^2]^2} \\ &= \frac{\not{p}}{p^2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(32 i \pi^2) (p^2 + p \cdot k)}{[k^2 - M^2] [(p+k)^2 - m^2]^2} \\ &= (16 i \pi^2) \frac{\not{p}}{p^2} \left\{ \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - M^2] [(p+k)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[(p+k)^2 - m^2]^2} \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{p^2 + m^2 - M^2}{[k^2 - M^2] [(p+k)^2 - m^2]^2} \right\} \\ &= -\frac{\not{p}}{p^2} \left\{ B_0(p^2, M^2, m^2) + (p^2 + m^2 - M^2) \right. \\ &\quad \left. \times C_0(p^2, 0, p^2, M^2, m^2, m^2) - B_0(0, m^2, m^2) \right\}.\end{aligned}$$

Schließlich kann man noch das zweite und das dritte Integral mit den Formeln aus Anhang D.1 umschreiben und erhält

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_0(p^2, M^2, m^2)}{\partial \not{p}} &= -\frac{\not{p}}{p^2} \left\{ B_0(p^2, M^2, m^2) - \frac{A_0(m^2)}{m^2} - 1 + (p^2 + m^2 - M^2) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(M^2 (B_0(m^2, m^2, M^2) - 1) - 2A_0(M^2)) m^2 + M^2 A_0(m^2)}{4m^4 M^2 - m^2 M^4} \right\}.\end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Volume I* (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
- [2] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [3] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).
- [4] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973).
- [5] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973).
- [6] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [7] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [8] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43**, 209 (1993).
- [9] S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
- [10] J. Gasser und H. Leutwyler, Annals Phys. **158**, 142 (1984).
- [11] J. Gasser und H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
- [12] S. Necco, PoS **LAT2007**, 021 (2007).
- [13] J. Gasser, M. E. Sainio und A. Svarc, Nucl. Phys. B **307**, 779 (1988).
- [14] E. E. Jenkins und A. V. Manohar, Phys. Lett. B **255**, 558 (1991).
- [15] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor und U. G. Meissner, Nucl. Phys. B **388**, 315 (1992).
- [16] T. Becher und H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C **9**, 643 (1999).
- [17] T. Fuchs, J. Gegelia, G. Japaridze und S. Scherer, Phys. Rev. D **68**, 056005 (2003).

- [18] O. Stern, Nature **132**, 103 (1933).
- [19] B. Kubis und U. G. Meissner, Nucl. Phys. A **679**, 698 (2001).
- [20] T. Ebertshauser, H. W. Fearing und S. Scherer, Phys. Rev. D **65**, 054033 (2002)
- [21] G. Colangelo, J. Gasser und H. Leutwyler, Phys. Rev. Lett. **86**, 5008 (2001).
- [22] T. Fuchs, J. Gegelia und S. Scherer, J. Phys. G **30**, 1407 (2004).
- [23] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Eur. Phys. J. A **26**, 1 (2005).
- [24] D. Djukanovic, J. Gegelia und S. Scherer, private Mitteilung.
- [25] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003).
- [26] W. J. Marciano und H. Pagels, Phys. Rept. **36**, 137 (1978).
- [27] G. Altarelli, Phys. Rept. **81**, 1 (1982).
- [28] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
- [29] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [30] J. S. Bell und R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
- [31] S. Coleman, J. Math. Phys. **7**, 787 (1966).
- [32] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie* (Bibliograph. Inst., Mannheim 1965)
- [33] J. C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
- [34] N. Fettes, U. G. Meissner, M. Mojzis und S. Steininger, Annals Phys. **283**, 273 (2000).
- [35] J. Gegelia, G. S. Japaridze und K. S. Turashvili, Theor. Math. Phys. **101**, 1313 (1994) [Teor. Mat. Fiz. **101**, 225 (1994)].
- [36] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Lett. B **586**, 258 (2004).
- [37] T. Fuchs, M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Lett. B **575**, 11 (2003).

- [38] M. R. Schindler, J. Gegelia und S. Scherer, Nucl. Phys. B **682**, 367 (2004).
- [39] J.J. Sakurai, *Currents and Mesons* (The University of Chicago Press, Chicago, 1969).
- [40] M. C. Birse, Z. Phys. A **355**, 231 (1996).
- [41] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich und E. de Rafael, Phys. Lett. B **223**, 425 (1989).
- [42] D. Djukanovic, M. R. Schindler, J. Gegelia, G. Japaridze und S. Scherer, Phys. Rev. Lett. **93**, 122002 (2004).
- [43] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh und A. Salam, Nucl. Phys. **28**, 529 (1961).
- [44] Riazuddin und Fayyazuddin, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).
- [45] C. Hacker, N. Wies, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Rev. C **72**, 055203 (2005).
- [46] W. Rarita und J. S. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
- [47] P. A. Moldauer und K. M. Case, Phys. Rev. **102**, 279 (1956).
- [48] T. Pilling, Mod. Phys. Lett. A **19**, 1781 (2004).
- [49] T. R. Hemmert, B. R. Holstein und J. Kambor, J. Phys. G **24**, 1831 (1998).
- [50] H. B. Tang und P. J. Ellis, Phys. Lett. B **387**, 9 (1996).
- [51] N. Wies, J. Gegelia und S. Scherer, Phys. Rev. D **73**, 094012 (2006).
- [52] L. M. Nath, B. Etemadi und J. D. Kimel, Phys. Rev. D **3**, 2153 (1971).
- [53] V. Pascalutsa, *Covariant Description of Pion–Nucleon Dynamics* (Print Partners-Ipskamp, Enschede 1998).
- [54] S. Weinberg, Nucl. Phys. B **363**, 3 (1991).
- [55] G. Ecker, Prog. Part. Nucl. Phys. **35**, 1 (1995).
- [56] T. R. Hemmert, B. R. Holstein und J. Kambor, Phys. Lett. B **395**, 89 (1997).

- [57] R. Mertig, M. Bohm und A. Denner, *Comput. Phys. Commun.* **64**, 345 (1991).
- [58] D. Djukanovic, Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2008.
- [59] T. Hahn und M. Perez-Victoria, *Comput. Phys. Commun.* **118**, 153 (1999).
- [60] D. Djukanovic, J. Gegelia, A. Keller und S. Scherer, arXiv:0902.4347 [hep-ph].
- [61] J. Friedrich und T. Walcher, *Eur. Phys. J. A* **17**, 607 (2003).
- [62] T. Fuchs, J. Gegelia und S. Scherer, *J. Phys. G* **30**, 1407 (2004).
- [63] Y. Takahashi, *Nuovo Cimento, Ser. 10*, **6**, 370 (1957).
- [64] G. Passarino und M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys. B* **160**, 151 (1979).

# Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Scherer für die sehr interessante Themenstellung und die hervorragende Betreuung und Unterstützung während dieser Diplomarbeit bedanken.

Desweiteren danke ich besonders Herrn Dr. Jambul Gegelia für seine große Hilfsbereitschaft und Geduld bei der Beantwortung aller Fragen.

Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Dr. Dalibor Djukanovic dafür bedanken, dass er mir freundlicherweise einige seiner Programme zur Verfügung gestellt hat.

Mein Dank gilt auch allen Mitgliedern der Arbeitsgruppen von Herrn Prof. Dr. Scherer und Herrn Prof. Dr. Vanderhaeghen für die tolle Atmosphäre. Insbesondere möchte ich Herrn Marius Hilt dafür danken, dass er stets bereit war mir zahlreiche Fragen zu beantworten.

Besonders danke ich meiner Freundin Hildegard Berger für das sorgfältige Korrekturlesen und ihre Unterstützung.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich jederzeit unterstützt und mir das Studium ermöglicht haben.